РАВНОМЕРНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРАФА В МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА[1].

Коганов А. В.
НИИСИ РАН, Москва, Россия.

Задача вложения бесконечного графа (счётное число вершин и рёбер) в континуальное метрическое пространство возникает в математической физике, биологии, экологии и макроэкономике, когда для рассмотрения объекта изучения в крупном масштабе требуется переход от дискретных описаний микроуровня к макроскопическим моделям непрерывных сред. **Определение 1.** Граф равномерно вложен в метрическое пространство, если выполнены условия: 1а. Расстояние между любыми двумя вершинами не меньше некоторого значения $\varepsilon > 0$. 2а. Длина любого ребра не превышает некоторого значения a, $0 < a < \infty$. Минимальная евклидова размерность такого вложения — метрическая размерность графа $n = \operatorname{metr}\dim(G, A)$. □ **Определение 2**. Если $U(g,r)$ $r-$окрестность вершины $g \in G$ без учёта ориентации, $r \in \mathbb{N}$, то $\operatorname{top}\dim(G,A) = \sup_{g\in G}\left\{\lim_{r\to\infty} \log(\#U(g,r))/\log(r)\right\}$ — топологическая размерность. □ Тогда $\operatorname{top}\dim(G,A) \le \operatorname{metr}\dim(G,A)$ и имеются примеры строгого неравенства. **Определение 3**. Назовём $n-$сетью граф вида $\operatorname{Net}(n) = (\mathbb{Z}^n, A[n])$, где $A[n] = \left\{(z, z + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) \mid z \in \mathbb{Z}^n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{-1;0;1\}\right\}$. □ **Определение 4.** *Фактор* графа (G, A) по разбиению θ на множестве вершин —это граф на элементах разбиения, и ребро (v, w) означает: $\exists\ g \in v, q \in w$, $(g,q) \in A$. Факторграф *равномерный*, если число вершин во всех элементах разбиения равномерно ограничено сверху. □ **Теорема 1**. Счетный граф имеет метрическую размерность n, если, и только если, он имеет равномерный факторграф, который изоморфно вкладывается в $\operatorname{Net}(n)$ (минимальное n). □ **Определение 5.** Граф ярусный ранга s, если в нём нет ориентированных циклов, и любые два пути по рёбрам, соединяющие две вершины, различаются по длине не более чем в s раз (минимальная оценка). □ **Теорема 2**. Граф имеет равномерное вложение в псевдоевклидово пространство размерности выше 1 с метрикой Лоренца ($\|x\|_L = \|x\|_M\ (x \in C_-) \mid \infty$), если, и только если, граф ярусный конечного ранга. □ **Теорема 3**. Любое ориентированное дерево с конечным (возможно, не ограниченным) ветвлением имеет равномерное вложение в пространство размерности выше 1 с метрикой $\|x\|_A = abs\|x\|_M$. □ Здесь $\|x\|_M$ — норма Минковского, C_- —конус прошлого точки 0.

Литература.

1. John Beem, Paul Ehrlich. Global Lorentzian geometry. Marcel Dekker. inc. New York, Basel, 1981. (Дж. Бим, П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия. М. «Мир», 1985, 400с.)

---

[1] При поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00041а, и Российского гуманитарного научного фонда, проект 11-03-00035а