

ОБ ЭФФЕКТЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ЛОГИСТИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Безрядина И. А., Дубровский С. А.

(Россия, Липецк)

Исследуется эффект перемешивания, связанный с инверсией фазы. Построена и проанализирована диаграмма состояния инверсионных границ в зависимости от начальных условий. Предлагается новый вариант изучения картины перехода к хаосу путём анализа инверсионных границ.

Во многих нелинейных системах переход к хаотическому аттрактору происходит в результате каскада бифуркаций удвоения периода (Фейгенбаума) [1–4]. В работе рассматривается новый, как нам кажется, «эффект инверсии фазы» [5]. Он является причиной того, что для достижения устойчивого цикла при фиксированных значениях параметра необходимо различное количество итераций в зависимости от начального условия. Явление «инверсии фазы» возникает при всех значениях параметра в логистическом отображении

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \varphi(x) = \lambda x(1-x). \quad (1)$$

На бифуркационной диаграмме отображения (1) этот эффект обнаруживается в зависимости от начального условия x_0 и параметра λ .

Эффектом инверсии фазы или **эффектом перемешивания** [5] будем называть переход между ветвями на бифуркационной диаграмме, который возникает при незначительном изменении значения параметра или начального условия x_0 . На такой диаграмме сложно отследить закономерности в возникновении инверсионных переходов. Естественный путь исследования — изменение на-

чальных условий при фиксированном λ . 500 первых итераций опускались. На рис. 1 представлена диаграмма для λ , соответствующему циклу периода 2. Для описания инверсии фазы рассмотрим траекторию орбит до и после точек инверсии (в окрестности $x_0 = 0,03; 0,1; 0,3; 0,7; 0,9; 0,97$). Удобным графическим представлением орбиты является диаграмма Ламерея [2, 3]. Если x_0 принимает значения неподвижных точек φ , то орбиты постоянны. При устойчивом цикле периода 2, соответствующем неподвижной точке $\varphi^2(x)$, орбиты принимают вид

$$[x_k, x_{k+1}, x_k, x_{k+1}, \dots]. \quad (2)$$

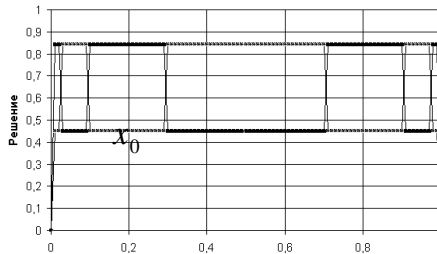


Рис. 1. Зависимость решения от начального условия при $\lambda = 3,4$. Видны инверсионные переходы (вертикальные линии), соответствующие изменению порядка обхода неподвижных точек отображения $x_{n+2} = \varphi^2(x_n)$

Если начальная точка $0,1 < x_0 < 0,3$ (до инверсионного перехода), орбиты соответствуют (2), в случае $0,3 < x_0 < 0,7$ (после перехода) порядок обхода неподвижных точек отображения $\varphi^2(x)$ меняется на противоположный. Существует 3 сценария рождения инверсии фазы. Если $x_0 \approx 0,3$, происходит изменение орбит (рис.2а). До инверсии наблюдается переход к немонотонному поведению итераций, и затем система выходит на цикл. После инверсии орбита сходится к циклу немонотонно. При $x_0 \approx 0,7$ характерен немонотонный переход к циклу и изменение порядка обхода неподвижных точек (рис. 2б). При x_0 в окрестности 0,9 наблюдается картина, обратная диаграмме Ламерея при $x_0 \approx 0,3$ (рис. 2в).

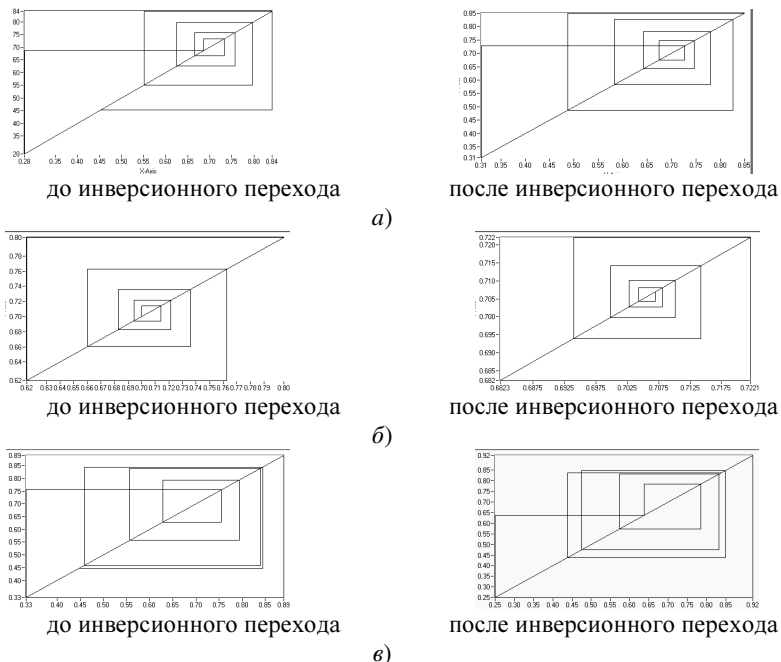


Рис. 2. Диаграмма Ламерея при значении $\lambda = 3,4$ (до и после инверсионного перехода), для наглядности взяты первые 10 итераций: а) в окрестности критической точки $x_0 = 0,29$; б) в окрестности точки $x_0 = 0,705$; в) в окрестности точки $x_0 = 0,9$

При построении зависимости решения от начального условия x_0 при λ , соответствующей циклу 2^2 , наблюдается увеличение числа инверсий. К имеющимся инверсиям, возникшим на цикле 2^1 , добавляются другие, рождающиеся по схожему сценарию. При λ , соответствующему циклу 2^3 , ситуация аналогична (рис. 3). Для классификации инверсий вводится понятие «рода».

Назовём инверсии, возникающие на 2^1 цикле между ближайшими ветвями, инверсиями I рода, на цикле 2^2 — II рода, на цикле 2^n — n рода. Из рис. 3 видно, что длины интервалов между близлежащими инверсиями одного рода (назовём их «межинвер-

сионными» интервалами), как и точки перехода, расположены симметрично по отношению к центру отрезка между двумя соседними точками перехода старшего рода.

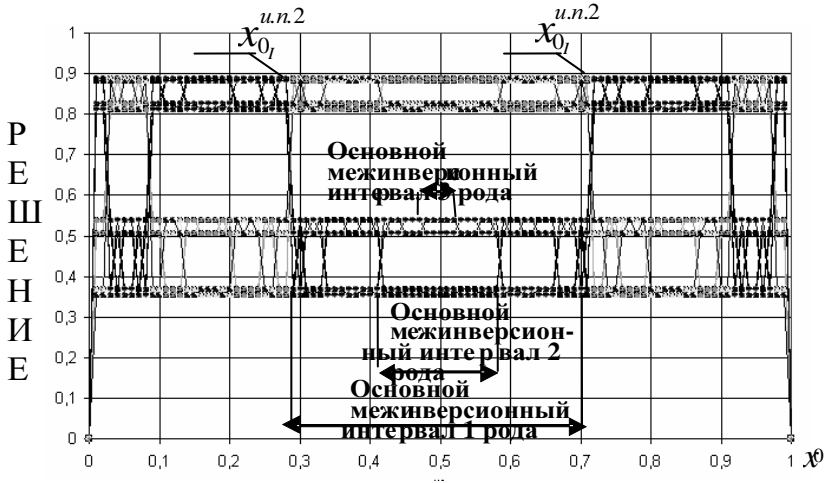


Рис. 3. Зависимость значений логистического отображения от начального условия x_0 при $\lambda = 3,55$, соответствующего циклу периода 8. Шаг построения $\varepsilon_2 = 0,01$

Установим зависимость длин интервалов между координатами точек перехода от рода. Для этого выделяются основные (максимальные по x_0) межинверсионные интервалы (рис. 3) и их величины связываются с порядком цикла (родом инверсии). Значение λ выбрано соответствующее циклу периода 2^5 . Длины основных межинверсионных интервалов связаны между собой зависимостью, аппроксимирующейся экспоненциально $int(N) = x_{0_N}^{u.n.2} - x_{0_N}^{u.n.1} = 1,2 \cdot e^{-0,97 \cdot N}$, где $int(N)$ — основной межинверсионный интервал; $x_{0_N}^{u.n.1}$, $x_{0_N}^{u.n.2}$ — начальная и конечная точки инверсионных переходов N -го рода; N — род инверсий или степень удвоения периода.

Координаты начальной и конечной точек перехода разного рода связаны прямолинейно $x_{0_N}^{u,n,2} = 1 - x_{0_N}^{u,n,1}$ и описываются уравнениями $x_{0_N}^{u,n,1} = -2 \cdot \text{int}(N) + 1$, $x_{0_N}^{u,n,2} = 2 \cdot \text{int}(N) - 1$.

Для получения более полной картины построена **диаграмма состояния инверсий фазы** в области параметров $x_0 - \lambda$, причём $x_0 \subset [0, 1]$, а $\lambda \subset [0, 4]$. Для каждой λ рассчитывается x_i при различных начальных условиях x_0 , принадлежащих отрезку $[0, 1]$ и изменяемых с шагом ε_2 . Затем для устранения переходных процессов отбрасываются n итераций и сравнивается $(n+1)$ итерация при x_0 и $(x_0 + \varepsilon_2)$, $(x_0 + \varepsilon_2)$ и $(x_0 + 2\varepsilon_2)$, ... $(x_0 + m\varepsilon_2)$ и $(x_0 + (m+1)\varepsilon_2)$, то есть соседние значения по x_0 . Известно, что начальные условия не влияют на топологию бифуркационной диаграммы. Если соседние значения по x_0 не совпадают, точка $(x_0 + (m+1)\varepsilon_2; \lambda)$ отмечается чёрным цветом. Затем меняется параметр λ на шаг ε_1 и снова продлевается эта процедура. Диаграмма (рис. 4) отображает инверсионные переходы различного рода. Если взять координаты точки, отмеченной чёрным цветом, получаются значения λ и начального условия x_0 , при которых происходит инверсия фазы. На практике оказывается, что не во всех точках наблюдаются инверсии. Проверку наличия инверсии осуществляли с помощью численного исследования зависимости решения от x_0 . На диаграмме состояния присутствуют «флуктуации» решений. Величина их незначительна. Разделим флуктуации на «хаотические» и «регулярно упорядоченные». Исследуем влияние ошибок округления компьютера (система погрешности, связанная с конечностью мантиссы). На рис. 5 представлена диаграмма, где результаты расчёта округлены до 12 знака. Видны только «действительные» или «истинные» инверсии. Следовательно, «флуктуации» определяются 12 знаком и более младшими разрядами после десятичной точки. Несмотря на это, они также выполняют свою функцию, заключающуюся в порождении «истинных» инверсий.

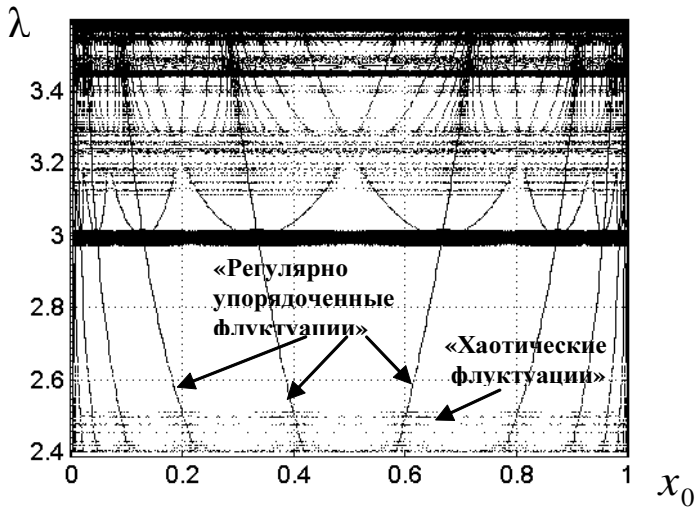


Рис. 4. Диаграмма состояния, показывающая «истинные» инверсии, «ложные» инверсии и случайные флуктуации

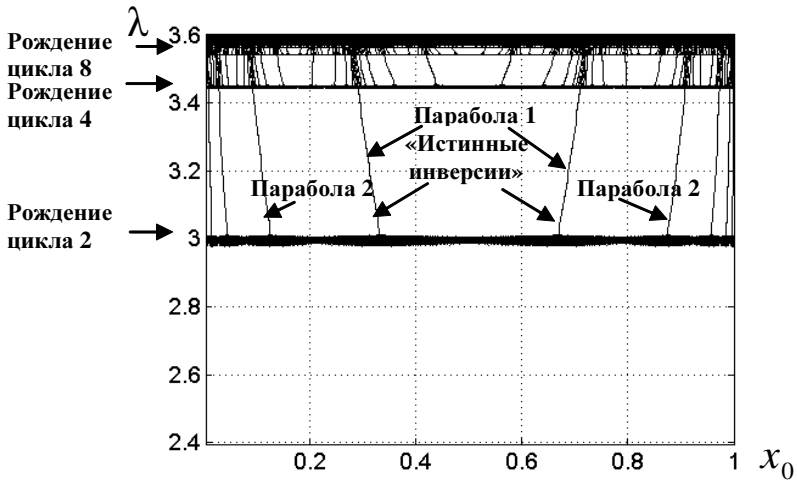


Рис. 5. Диаграмма состояния с данными, округлёнными до 12 знака после запятой, показывающая «истинные» инверсии

На рис. 4, 5 видно, что инверсионные переходы являются продолжением «регулярно упорядоченных» флуктуаций. Т.е. возможен прогноз инверсионных границ.

При перестройке решения в режиме удвоения цикла в окрестности значения λ наблюдаются «биения», состоящие из «флуктуаций» и инверсий фазы. На рис. 5 они отражены чёрными полосами, имеющими утолщение в окрестностях инверсионных переходов. Размер области по λ является следствием колебания решений при удвоении периода и может изменяться. По мере увеличения знака округления расчётов диапазон колебания по λ сокращается. На рис. 6 представлен фрагмент бифуркационной диаграммы Фейгенбаума, показывающий рождение цикла периода 32 при разном количестве пропущенных итераций.

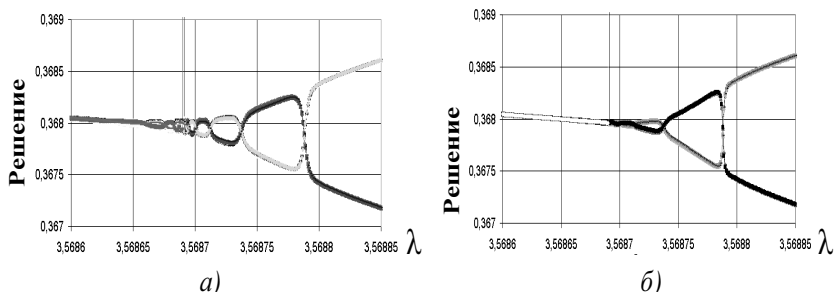


Рис. 6. Рождение цикла 32 на бифуркационной диаграмме логистического отображения: а) количество пропущенных итераций $n = 1000$; б) количество пропущенных итераций $n = 2000$

Отмечено, что инверсионные переходы осуществляются плавно. При увеличении количества опущенных итераций устраняется неточность, возникающая в результате незаконченности переходных процессов. В результате этого количество «биений» при раздвоении ветви сокращается. Происходит сужение размера области колебания решения. Инверсионные переходы осуществляются более резко. Размер инверсионной области на диаграмме состояния инверсионных границ сокращается до минимума

(по λ), вплоть до одного шага (проводились анализы при $n = 20000, 30000$), но не исчезают полностью.

Сделано предположение, что удвоение периода порождается флуктуациями в предбифуркационные периоды, то есть является следствием «биений» в районе инверсионной полосы в результате постоянных инверсий фазы. На наличие «флуктуаций», инверсионных переходов и инверсионных зон количество пропущенных итераций не влияет.

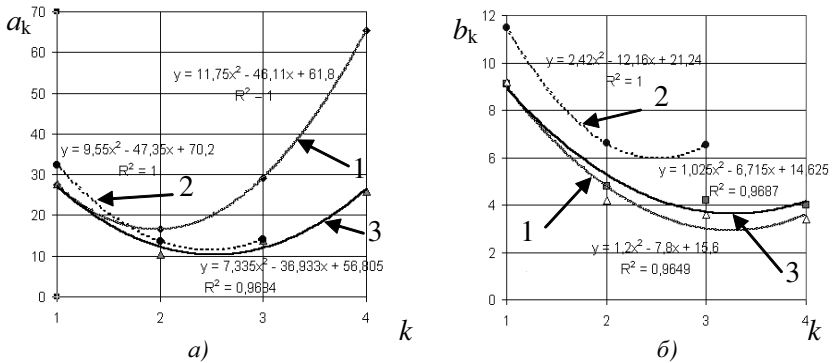


Рис. 7. Зависимость коэффициента от номера параболы: 1 – «истинные» инверсионные границы на цикле периода 2; 2 – «истинные» инверсионные границы на цикле 4; 3 – «ложные» инверсионные границы на цикле 4; а) зависимость коэффициента a_k ; б) зависимость коэффициента b_k

Рассмотрим детально «истинные» инверсионные границы и «регулярно упорядоченные флуктуации» на диаграмме состояния. Удивительным оказался тот факт, что они описываются уравнением, похожим на логистическое отображение (1) с разницей только в коэффициент b_k :

$$\lambda^{u.n.} = a_k x_0^{u.n.} (1 - x_0^{u.n.}) + b_k,$$

где k – номер параболы с точкой экстремума (минимума) на середине отрезка $x_0 \subset [0, 1]$; a_k — коэффициент k -й параболы; b_k — свободная переменная k -й параболы. На рис. 7 показана зависи-

мость коэффициентов от k . Можно утверждать, что в данном случае очевидно некоторое проявление фрактальности.

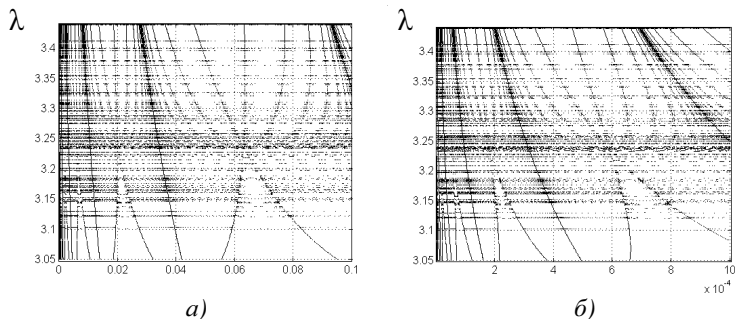


Рис. 8. Диаграмма состояния при различных ε_2 и x_0 :

а) при $x_0 \subset [0; 0,1]$, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$; б) при $x_0 \subset [0; 0,001]$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$

В окрестности 0 и 1 количество инверсий растёт по мере уменьшения шага ε_2 . При приближении картины к 0 и 1 также проявляется характерное для фракталов свойство самоподобия (рис. 8). Если интерпретировать предельные значения начальных условий $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$ как границы движущегося потока жидкости или газа, то эффект, представленный на рис. 8, можно рассматривать как тормозящие движения перемешивания соседних слоёв. Чем ближе они расположены к границе, тем интенсивнее начинают взаимодействовать.

Диаграмма состояния или **модель инверсионных границ** в зависимости от начальных условий представляет собой сложную структуру из квадратичных, экспоненциальных и линейных зависимостей. Она представляет собой структуру не менее сложную, чем диаграмма Фейгенбаума. Естественно, эти диаграммы связаны между собой, они отражают удвоения периодов, наличие хаоса и окон.

В работе предлагается новый подход к изучению сценария Фейгенбаума в логистическом отображении с помощью анализа инверсионных границ. Считается, что начальные условия не влияют на топологический вид бифуркационной диаграммы. Проведённое ис-

следование показало обратное. Происходят инверсионные переходы на всей бифуркационной диаграмме, причём невозможно предсказать, где окажется решение после точки инверсии. Решение непрерывно посещает почти каждую ветвь, переходя от одной к другой. В каждой точке диаграммы наблюдается фазовое перемешивание траекторий.

При использовании сценария Фейгенбаума для описания перехода к турбулентности [6, 7] важным становится выбор начального условия, так как малые его изменения могут привести к существенным различиям в картине течений. Система обладает чувствительностью к начальным условиям. Это необходимо учитывать для получения и дальнейшего анализа картины рождения турбулентности.

В окрестности значений λ , когда зарождается и происходит удвоение периода на диаграмме $x_0 - \lambda$, появляется «шумящий» слой во всём диапазоне значений x_0 (чёрные полосы на рис. 4, 5). В ряде физических процессов в окрестности фазовых переходов наблюдается усиление флуктуаций в среде. Следовательно, бифуркация удвоения периода характеризует процессы фазовых превращений.

Предполагается, что инверсионный эффект влияет на сценарий возникновения турбулентности, так как при изменении λ (этот параметр связывают с числом Рейнольдса [6, 7]), происходит не только удвоение периода, а при нагреве жидкости раздвоение пограничного слоя, но и перемешивание между слоями (в результате инверсионных переходов). Осуществляется перекачка энергии, результатом которой и является хаос. Картину на диаграмме состояния можно описать следующим образом: «чисто хаотические флуктуации» формируют «регулярно упорядоченные флуктуации», те в свою очередь питают «истинные» инверсионные границы, а «истинные» инверсионные границы больших размеров (по величине λ) порождают меньшие, пока не наступит хаос. Предложенный подход связывает наличие вихрей с инверсионными переходами между ветвями. Данная трактовка требует своего подтверждения.

Явление инверсии фазы добавляет сложность изучаемой системе и должно учитываться при определении свойств модели логи-

стического отображения, а также процессов, описываемых этой моделью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems // Los Alamos Sci. 1 (1980). — № 1. — P. 4–27.
2. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990.
3. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент//Г. Г. Малинецкий. — М.: Наука, 1997. — 276 с.
4. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 336 с.
5. Безрядина И.А., Дубровский С.А. Исследование одномерного логистического отображения, родственных дискретных структур и их использование в задачах долгосрочного прогнозирования/ МКО — 2005, ч. 2. — С. 702–710.
6. Трубецков Д.И. Турбулентность и детерминированный хаос// Соросовский образовательный журнал. — № 1. — 1998.
7. Крайнов В.П. Качественные методы в физической кинетике и гидродинамике. — М.: Высш. шк., 1989. — С. 131–134.

ABOUT EFFECT OF PHASE INTERMIXING IN ONE-DIMENSIONAL MAPS

Bezryadina I. A., Dubrovskiy S. A.

(Russia, Lipetsk)

The picture of a birth of effect of the intermixing connected to inversion of phase is investigated. The diagram of a condition of inversion borders is constructed and analysed. The new variant of studying of picture of transition to chaos is offered by the analysis of inversion borders.