КОЛМОГОРОВСКИЕ ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ОБРАЗОВАНИЕ

Кузичев А. С.

(Россия, Москва)

В основаниях математики выделяются два пути построения теорий первого порядка: хорошо известный путь Фреге и новый путь Колмогорова. Различные постулаты (аксиомы и правила вывода) всех теорий (исчислений) сформированы на фрегевском пути. Автором предложена и осуществлена теоретико-множественная колмогоровская перестройка основных понятий уже построенных по Мендельсону на пути Фреге исчислений. Следуя А.Н. Колмогорову, центральным понятием каждой теории является бесконечный класс выводов, а не конечный вывод, как принято, начиная с Г. Фреге. На колмогоровском теоретико-множественном пути впервые найдено доказательство непротиворечивости всех известных (на пути Фреге) теорий первого порядка, редуцируемых в логику высказываний. Доказательство получено для каждой такой неполной (по Гёделю) теории известными школьными комбинаторными средствами. Результаты работы могут и должны быть внедрены в учебный процесс – преподавать основания наук целесообразно не по Фреге с ограничительными теоремами Гёделя о неполноте, как это делается в настоящее время, а теоретико-множественно по Колмогорову без ограничений.

В основаниях математики широко известны теоремы Гёделя 1931 года о неполноте богатых по выразительным возможностям теорий первого порядка. Из них, в частности, следует, что доказательство непротиворечивости каждой такой теории К должно использовать невыразимые в К идеи или методы.

Д. Гильберт, все авторы и исследователи этих теорий уверены в их непротиворечивости. Но её доказательство для многих известных теорий пока не найдено, а для таких, как исчисление FA арифметики Пеано, доказательства весьма громоздки, используют теоретико-множественную индукцию.

Теоремы Гёделя и следствие из них полностью обоснованы (доказаны). Никаких сомнений, казалось, нет. Более того, у многих сомневающихся находились конкретные ошибки.

Я был потрясен, когда узнал, что А. Н. Колмогоров относит себя к сомневающимся в теоремах Гёделя о неполноте. Нет, он не оспаривал результаты Гёделя, относящиеся к конкретным исследуемым теориям, но он не верил в распространение этих теорем без доказательства на все известные теории при любых их построениях. Он так и говорил мне: “А где доказательство?”

Действительно, нет доказательства, что теоремы Гёделя распространяются всеобъемлющим образом на все основания математики. А без доказательства Колмогоров не мог признать истинным обобщение этих теорем на все теории.

Надо сказать, что и сам Гёдель выражал некоторое сомнение в величии и универсальности своих результатов о неполноте, особенно следствий из них, см., например, [1]. Биограф Гёделя Г. Крайзель пишет, что “вопреки усилиям… представить результаты Гёделя как сенсацию, эти результаты не оказали революционизирующего влияния ни на представление большинства работающих математиков о своей науке, ни тем более на их практическую деятельность. Во всяком случае, <u>их влияние намного меньше, чем влияние внутреннего развития самой математики.</u>” [1, вып. 2 (260), с. 175]; *подчеркнуто мною – А.С.К.*

А как мы преподаем основания не только математики, но и всех наук, особенно теоретических? Принято почти в самом начале соответствующих курсов или семинаров ссылаться на теоремы Гёделя о неполноте (часто даже не формулируя их) как на ограничительные — запрещающие многое сделать в рассматриваемой области знания (как будто эти запреты в них доказаны или доказуемо следуют из них). Так, А. Тьюринг восклицает: “Может ли машина мыслить? ”. И отвечает, по существу ссылаясь на теоремы Гёделя, что человек такую мыслящую машину (даже теоретически) создать не может (см., например, работу А. Тьюринга [2]).

Взгляды Колмогорова на теоремы Гёделя о неполноте перевернули всю мою жизнь, особенно учитывая догматическую веру в эти теоремы моих ближайших родственников, коллег, учеников и подавляющего большинства математиков.

В нашей педагогической практике такая догматическая вера в теоремы Гёделя и следствия из них по существу навязывается всем учащимся; доказательства, весьма громоздкие и сложные, разбираются лишь на узкоспециальных занятиях с небольшим числом заинтересованных студентов, да и в основном, как я сейчас глубоко убежден, занятия эти проводятся фактически с целью не разобрать все возможные случаи (что малореально), а только усилить веру в результаты Гёделя и их обобщения.

Взгляды Колмогорова относительно теорем Гёделя были мало известны. Они никогда им не публиковались (хотя, возможно, запечатлены в рукописных архивах). Под руководством Колмогорова я работал с января 1980 по октябрь 1987 года, когда Андрей Николаевич заведовал кафедрой математической логики механико-математического факультета МГУ (я был сотрудником этой кафедры). По поводу теорем Гёделя я спорил с Андреем Николаевичем, однако, следуя его рекомендациям, изучал различные теории, прежде всего теоретико-множественные.

В результате мною впервые были найдены доказательства непротиворечивости многих известных теорий — доказательство непротиворечивости каждой теории строится секвенциально по Генцену на основе неразрешимого алгоритмического (но не логического!) аппарата одного из комбинаторно полных исчислений Шейнфинкеля–Карри– Чёрча, представляющего бестиповым образом неограниченное теоретико-множественное свёртывание Кантора; многим такие доказательства кажутся (без предъявления серьезных математических обоснований), особенно в силу их длиннот, очевидно противоречащими теоремам Гёделя о неполноте.

Мои результаты после обсуждений А. Н. Колмогоров представлял в печать — работы опубликованы в ДАН и других изданиях (см. библ. 4–12 в [3] и библ. 33, 38–44 в [4]). Андрей Николаевич подчеркивал значимость полученных результатов.

Он не только отмечал при этом, что его редукция 1925 года (см. [5]) позволяет, используя теоретико-множественную общность, значительно упростить построения и доказательства, сделав их общепонятными и общедоступными, но и впервые обратил внимание на правила вывода теорий, два этажа (посылки и заключение) которых могут быть основой упрощений. Важно при этом выбрать среди всех эквивалентных выводимых формул подходящие аксиомы для каждой теории.

Только к концу XX века я понял, что А. Н. Колмогоров был прав в своих сомнениях относительно роли теорем Гёделя в основаниях наук. Я не только понял, но и в [6] и настоящей работе излагаю вариант теоретико-множественной перестройки по Колмогорову каждой известной теории К (с сохранением выбранных её постулатов), предложенный мною в соответствии с идеями и рекомендациями Андрея Николаевича. Изложение результатов в [6] ведется на примере классической формальной арифметики FA, сформулированной в [7] по Мендельсону.

Постановка проблемы и её решение на колмогоровском направлении. Известные теории естественно создавались как непротиворечивые. Но доказательство непротиворечивости большинства таких теорий пока не найдено. Для каждой теории предложить доказательство — трудная проблема. Автор предлагает её решение для всех известных теорий, благодаря их теоретико-множественной перестройке по Колмогорову. Доказательство непротиворечивости осуществляется в два этапа: доказываются теорема 1 о редукции теории (перестроенной) в логику высказываний и, как её следствие, теорема 2 о непротиворечивости теории. Заметим: если теорема 1 опровергается, то соответствующий класс выводов не образует известную теорию и мною не рассматривается.

В целом математика развивается теоретико-множественно. Её разделы формализуются в виде аксиоматических теорий первого порядка. Однако в основе каждой теории лежит конечный объект — вывод. Такой путь исследования теорий восходит к трудам Готлоба Фреге (1848–1920).

Что будет, если центральным понятием теории считать бесконечный объект — класс выводов? Ответ на этот вопрос получаем, следуя идеям и рекомендациям А. Н. Колмогорова:

Доказательство непротиворечивости каждой известной аксиоматической теории K первого порядка, построенной в [6, 7] на фрегевском пути по Мендельсону.

К числу таких известных аксиоматических теорий относятся формульные исчисления гильбертовского типа, например, арифметики FA Пеано, теории множеств NF Куайна, теории множеств ZF Цермело–Френкеля, теории множеств NBG Неймана–Бернайса–Гёделя.

Настоящая работа содержит для теории K принципиально новые определения, формулировки и доказательства предложений из [6], а также комментарии к ним. Эти предложения, как и в [6], рассматриваются так же детально с целью убедить читателей в важности нового колмогоровского направления в основаниях современной науки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Каждую формулу (языка теории K) вида $(\forall x_1 \ \dots \ (\forall x_n (\rceil (A \supset A)))\ \dots \ )$, где $n \geq 0$, назовем *W-формулой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Каждую формулу (языка теории K) вида $T \supset H$ назовем *Выделенной формулой*, если T не является W-формулой, а H есть W-формула.

Замечание о выборе собственных аксиом теории K:

Если C есть Выделенная формула языка теории K, то в качестве собственной аксиомы теории K (не уменьшая общности) объявляется не она, а эквивалентная ей формула $\rceil\rceil C$, не являющаяся Выделенной.

Очевидно, что число всех аксиом теории K бесконечно, и выбраны они на фрегевском пути по Мендельсону (см. [6]).

В [6] приведены все постулаты исчисления формальной арифметики; вообще, по форме теории различаются синтаксически только собственными аксиомами (см. [7]).

ЛЕММА 1. Каждая аксиома (Собственная или Логическая) теории К не является ни W-формулой, ни Выделенной формулой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму 1 доказываем непосредственно, исследуя строение каждой аксиомы теории К и сравнивая её как слово в алфавите языка теории К с W-формулами и Выделенными формулами теории К. Лемма 1 доказана.

Подчеркнем, что предложения, аналогичные лемме 1, в литературе ранее автору не встречались.

Лемма 1 доказана комбинаторно на фрегевском пути. Но именно она (см. ниже п. 1 определения 3), по существу, характеризует теоретико-множественную колмогоровскую перестройку основных понятий (прежде всего введение нового понятия – *класса выводов*) теории К. Перестройка теории К осуществлена в следующем определении 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Индуктивно определим бесконечные классы $A_0, A_1, A_2, \ldots$, построив (определив) все их элементы — (конечные) выводы теории К так, что каждый вывод D формулы E входит только в один класс A_k, $k \geq 0$, в D укажем все его пары.

1. Если E — аксиома теории К, то считаем: вывод D состоит только из одной формулы E, и D принадлежит классу A_0. В классе A_0 других элементов (выводов), кроме всех так введенных, нет.

Парой указанного *вывода D* из класса A_0 считается единственная пара E, D.

2. Пусть классы $A_0, \ldots, A_n$ определены, $n \geq 0$. Определим класс A_{n+1}.

2.1. Если вывод U формулы T принадлежит классу A_n, то считаем, что вывод D формулы $E = \forall xT$, являющийся продолжением вывода U по правилу Gen, принадлежит классу A_{n+1}.

Парами вывода D считаются пара E, D и все пары вывода U.

2.2. Пусть вывод U формулы T и вывод Y формулы $T \supset E$ хотя бы один принадлежит классу A_n, а другой принадлежит одному из классов $A_0, \ldots, A_n$.

Считаем, что вывод D формулы E, являющийся продолжением выводов U и Y по правилу MP, принадлежит классу A_{n+1}.

Парами вывода D считаются (называются) пара E, D и все пары выводов U и Y. Например, пара $T \supset E$, Y в D есть по этому определению пара $T \supset E$, Y в Y.

Вместо MP пишем MP*, если вторая посылка $T \supset E$ правила MP является Выделенной формулой.

2.3. Вывод J формулы S принадлежит классу A_{n+1} тогда и только тогда, когда J определен в п. 2.1 либо в п. 2.2.

3. Считаем, что в множестве M всех выводов теории К других элементов (выводов), кроме указанных в пп. 1 и 2, нет.

Классы $A_0, A_1, A_2, \ldots$, состоящие только из выводов теории К (построенных в пп. 1 и 2), определены.

По заданию каждый из классов $A_0, A_1, A_2, \ldots$ очевидно бесконечен.

Множество M (всех выводов теории К) есть объединение всех классов $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

Определение 3 закончено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть J — фиксированный вывод из множества M всех выводов теории К.

Каждой паре F, B вывода J, по его построению (см. определение 3), сопоставим формулу [F, B] языка L логики высказываний, которую назовем *0-переводом (формулы F из J)*:

1) в случае каждого правила MP из J, например, вида, указанного в п. 2.2 (определения 3), если MP есть MP*, то для пар $T \supset E$, Y и E, D в J положим $[T \supset E, Y] = q$ и $[E, D] = q$, где q есть $\neg(R \supset R)$, R — фиксированная формула языка L логики высказываний;

2) для каждой пары F, B вывода J, для которой 0-перевод в п. 1) не указан, положим $[F, B] = \neg q$.

Определение 4 закончено.

Далее иногда вместо выражения “формула [F, B] выводима в исчислении L логики высказываний” будем писать (см. теорему 1): “*предложение (1) <F, B> верно* ”.

Отметим, что в множестве M каждая пара F, B любого вывода J теории K в соответствии с определением 3 есть пара F, B вывода B теории K.

Заметим, что в каждом выводе J из множества M, следуя определению 3 (п. 2.2), пара $T \supset E$, Y в D для указанного в этом определении вывода D (из J) вводится однозначно как пара $T \supset E$, Y в Y. Здесь вывод Y принадлежит классу A_k, $0 \le k \le n$, вывод D принадлежит классу A_{n+1}, вывод J принадлежит классу A_r, $r \ge n + 1$, причем вывод D формулы E построен продолжением по правилу MP выводов U и Y формул T и $T \supset E$ соответственно, вывод U принадлежит классу A_t, $0 \le t \le n$; хотя бы один из двух выводов U и Y обязательно принадлежит классу A_n.

В фиксированном выводе J **не путать** указанную **пару** $T \supset E$,Y **с формулой** $[T \supset E, Y]$ логики высказываний, вводимой определением 4 и сопоставляемой указанной паре $T \supset E$,Y из J (формула $[T \supset E, Y]$ есть по определению 4 либо q, либо $\urcorner q$)!

Редукция теории K в логику высказываний L на колмогоровском пути доказана в следующей теореме 1 на основе определений 3 и 4, леммы 1 с использованием метода от противного.

ТЕОРЕМА 1 (о редукции M в L). *Предложение (1) <F, B> верно для всех пар F, B каждого вывода из множества M; в M нет выводов с правилом MP*.*

Доказательство. Теорему 1 докажем непосредственно по построению выводов (элементов) в множестве M, следуя пп. 1 – 3 определения 3, то есть теорему 1 докажем индукцией по числу s бесконечных классов $A_0, \ldots, A_s$ (базис: $s = 0$; шаг индукции: от $s = n$ к $s = n + 1$, $n \ge 0$).

1. Прежде всего теорему 1 доказываем для всех выводов из класса A_0 при всех их вхождениях в элементы (выводы) из M ($s = 0$), поскольку на основании леммы 1 аксиомы теории K не являются ни W-формулами, ни Выделенными формулами, их 0-переводы $\urcorner q = \urcorner\urcorner(R \supset R)$ выводимы в исчислении L логики высказываний. Базис индукции по s доказан.

2. Шаг индукции. Обратимся к п. 2 определения 3, предполагая теорему 1 уже (по гипотезе индукции) доказанной для всех выводов из классов A_0, …, A_n, $n \geq 0$.

Пусть $s = n+1$. По построению вывода D из класса A_{n+1}, для выводов U и Y из пп. 2.1 и 2.2 определения 3 при их вхождениях в вывод D теорема 1 доказана по гипотезе индукции.

Докажем теперь теорему 1 для пары E, D этого вывода D из класса A_{n+1}.

Следуя определениям 3 и 4, осталось рассмотреть п. 2.2 определения 3 задания вывода D. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что в правиле MP из пункта 2.2 определения 3 посылка $T \supset E$ является Выделенной формулой — правило MP есть MP*.

Тогда по пункту 1 определения 4 в выводе D имеем $[T \supset E, Y] = q$, q есть $\rceil(R \supset R)$, где R — формула логики высказываний, и теорема 1 в D для пары $T \supset E$, Y ложна. Однако по гипотезе индукции теорема 1 доказана для всех пар вывода Y и для пары $T \supset E$, Y в D, являющейся парой $T \supset E$, Y в Y по п. 2.2 определения 3.

Получили противоречие: теорема 1 для пары $T \supset E$, Y в D одновременно является ложной и истинной.

Поэтому вторая посылка $T \supset E$ правила MP в пункте 2.2 определения 3 не может быть Выделенной формулой.

Следовательно, в соответствии с пунктом 2 определения 4 имеем $[T \supset E, Y] = \rceil q$ и $[E, D] = \rceil q$. Формула $\rceil q$ выводима в логике высказываний, поэтому теорема 1 истинна для пары E, D и, следовательно, для всех пар F, B вывода D.

Таким образом, теорема 1 доказана для всех элементов (выводов) класса A_{n+1}, $n \geq 0$.

Итак, исследование постулатов в выводах из множества M закончено; показано: предложение (1) <F, B> верно для всех пар F, B каждого вывода множества M; в M нет выводов с правилом MP*.

Теорема 1 (о редукции множества M всех выводов теории K в логику высказываний L) доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Теория K непротиворечива.*
Доказательство. Теорему 2 докажем от противного. Допустим, что теория K противоречива. Тогда в K выводима каждая формула языка теории K; в частности, выводимы формулы S и $S \supset C$, где $S \supset C$ есть Выделенная формула, поэтому применение правила MP к S и $S \supset C$ дает в множестве M вывод, кончающийся правилом MP*, что невозможно в силу теоремы 1.

Теорема 2 о непротиворечивости теории K доказана.

Таким образом, каждая известная аксиоматическая теория первого порядка, построенная на пути Фреге, доказуемо непротиворечива. Доказательство получено комбинаторными средствами с помощью теоретико-множественной перестройки по Колмогорову каждой такой теории. Теоремы Гёделя о неполноте, доказанные на фрегевском пути, в перестроенной теории не являются ограничительными, поскольку все известные теории строятся и исследуются автором (в частности, доказывается их непротиворечивость) на теоретико-множественном пути Колмогорова.

В [6], в частности, объясняется, почему результаты [6] и настоящей работы стали возможны только в XXI веке. Дело в том, что гений Колмогорова опережал время; современники далеко не всегда и не вполне понимали его. Так, в свое время многими была не понята и подвергнута критике колмогоровская реформа школьного математического образования. В частности, попытки Андрея Николаевича включить в школьный курс математики некоторые элементы теории множеств и логики (см., к примеру, [8, 9]) встретились с неприятием и сопротивлением. Колмогорова ругали за “чуждый нашему обществу” “идеалистический” (!) теоретико-множественный подход. Несостоятельность критики проявилась позднее, когда “изгнание слова “множество” и соответствующих атрибутов из школьного курса не дало ожидаемого эффекта” ([10], с.130). Более того, именно теоретико-множественный подход позволяет разрешить многие проблемы оснований наук, исключить из оснований всякие рассуждения о парадоксах и доказать (на примере предлагаемой и других работ автора этих строк), что теоретико-множественная математика в её целостности имеет доказуемо непротиворечивую формализацию, естественно неаксиоматическую. Я убежден, что многие непонятые при жизни Колмогорова его идеи — это, в сущности, идеи XXI века, реализовывать которые предстоит его ученикам и последователям. О вкладе А. Н. Колмогорова в математическое образование см., например, [10 – 12].

Результаты данной работы могут и должны быть внедрены в учебный процесс — преподавать основания наук целесообразно не по Фреге с ограничительными теоремами Гёделя о неполноте, как это делается в настоящее время, а теоретико-множественно по Колмогорову без ограничений, ибо только на колмогоровском пути впервые найдено доказательство непротиворечивости всех известных (на пути Фреге) теорий первого порядка, редуцируемых в логику высказываний. Доказательство получено для каждой такой неполной (по Гёделю) теории известными школьными комбинаторными средствами.

Я благодарен всем, кто явно или неявно содействует становлению и развитию колмогоровского направления в основаниях наук. Особенно я признателен Юрию Васильевичу Прохорову, представившему в ДАН мои статьи [3, 13, 14], а также всем сотрудникам механико-математического и философского факультетов МГУ и других научных организаций России и зарубежья, обсуждавшим мои результаты.

Список литературы:

1. Крайзель Г. Биография Курта Гёделя // Успехи математических наук (УМН). 1988. Март – апрель. Т. 43. Вып. 2 (260). С.175–216; Май – июнь. Т .43. Вып. 3 (261). С. 203–238.
2. Тьюринг А. Может ли машина мыслить? (С приложением статьи Дж. фон Неймана “Общая и логическая теория автоматов”). М.: Физматгиз, 1960. 112 с.

3. Кузичев А. С. Колмогоровская редукция и непротиворечивость // Доклады академии наук (ДАН). 1999. Т. 367. № 2. С. 161–163.
4. Кузичев А.С. Об одной арифметически непротиворечивой λ-теории // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.. 1983. Bd. 29. S. 385–416.
5. Колмогоров А.Н. О принципе Tertium non datur // Мат. сб. 1925. Т. 32. № 4. С. 646–667.
6. Кузичев А.С. О негёделевской перестройке арифметики и других теорий первого порядка по Колмогорову. Доказательство их непротиворечивости. М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2004. 36 с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984. 320 с.
8. Колмогоров А.Н. Замечания о понятии множества в школьном курсе математики // Математика в школе. 1984. № 1. С. 52–53.
9. Колмогоров А.Н. Реферат доклада “Элементы логики в современной школе” // Математика в школе. 1971. № 3. С. 91–92.
10. Абрамов А.М. О педагогическом наследии Колмогорова // В кн. “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове”. М.: Фазис, 1999. С. 99–147.
11. Ершов А.П. Компьютеризация школы и математическое образование // В кн. “Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове”. М.: Фазис, 1999. С. 148–152.
12. Черкасов Р.С. Андрей Николаевич Колмогоров и школьное математическое образование // В кн. “Колмогоров в воспоминаниях”. М.: Физматлит, 1993. С. 583–605.
13. Кузичев А.С. Вариант формализации канторовской теории множеств // ДАН. 1999. Т. 369. № 6. С. 740–742.
14. Кузичев А.С. Решение проблемы Гильберта по Колмогорову // ДАН. 2000. Т. 371, № 3. С. 303–306.

KOLMOGOROV FOUNDATIONS OF MATHEMATICS AND EDUCATION

Kuzichev A. S.

(Russia, Moscow)

In foundations of mathematics are distinguished two way of constructing of first-order theories: the well-known way of Frege and the new way of Kolmogorov. Various postulates (axiomes and derivation rules) of all theories (calculi) are formulated on the way of Frege. The author realize the Kolmogorov set-theoretic reconstruction of basis concepts of calculi constructed on the way of Frege by Mendelson. Following Kolmogorov, the central concept of such theory is the infinite class of derivations, but not the finite derivation as it is usual beginning with Frege. On Kolmogorov set-theoretic way for the first time is obtained the proof of the consistency of all known (on Frege way) first-order theories, reducable into propositional logic. The proof is obtained for each such incomplete (according to Goedel) theory by known school combinatorial means. The results of this paper can be and must be introduce into educational process – to teach the foundations of sciences is advisable not by Frege with restrictive Goedel incompleteness theorems (as it is usual today), but by Kolmogorov set-theoretically without restrictions.