ДВАЖДЫ НЕПРЕРЫВНО-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ S-СПЛАЙНЫ

Силаев Д. А.

(Россия, Москва)

Построены дважды непрерывно дифференцируемые S-сплайны, состоящие из полиномов пятой степени, доказаны теоремы существования и единственности, установлены условия устойчивости таких сплайнов. Первые три коэффициента каждого полинома определяются условиями гладкой склейки, а три остальных – методом наименьших квадратов. Это обеспечивает их свойство сглаживать исходную информацию. Особенностью таких сплайнов является их полулокальность, т.е. каждый полином неявно зависит от тех значений функции, которые участвуют в определении предыдущих полиномов и не зависят от значений функции, определяющих последующие полиномы. Оказывается, что в этом случае условия устойчивости выполняются при весьма жестких ограничениях. При выполнении указанных условий и условий, обеспечивающих в начальной точке достаточную близость первого полинома и его производных значениям функции и её производным, доказано, что эта близость сохранится на всём заданном промежутке.

1. Построение S-сплайна

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $\{x_k\}_{k=0}^{k=N}$, $x_k = a + kh$, h — шаг сетки. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $y = (y_0, y_1, \dots, y_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на группы, для этого введем ещё одну равномерную сетку $\{\xi_k\}_{l=0}^{l=L}$, $\xi_l = a + lH$, $H = mh$, $m \in Z$. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат, и рассматриваем каждый l-ый полином на отрезке $[0,\mathrm{H}]$. Рассмотрим функционал:

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 .$$

Обозначим $SP^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=3}^{n} a_i x^i \right\}$ множество полиномов степени n с фиксированными коэффициентами a_0, a_1, a_2. В классе SP^n ищется такой полином, который удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^0 = y_0, a_1^0 = y'_0, \ a_2^0 = y''_0 , \tag{1.1}$$

$$a_0^l = g_{l-1}\left(\xi_l - \xi_{l-1}\right), \ a_1^l = g'_{l-1}\left(\xi_l - \xi_{l-1}\right), \ a_2^l = \frac{1}{2} g''_{l-1}\left(\xi_l - \xi_{l-1}\right)$$

при $l = 1,2,\ldots,\mathrm{L}$ (1.2)

и минимизирует Φ^l по $a_3, a_4, \ldots a_n$. Так как $a_0^l = g_l(0)$ и $a_1^l = g'_l(0)$, то условия (1.2) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В дальнейшем $n = 5$. Поэтому $a_i^l = \sum_{k=0}^{M} \Big(g_l\left(x_{ml+k} - x_{ml}\right) - y_{ml+k} \Big)^2 \to \inf\limits_{a_i^l}$, где $i = 3,4,5$, а $M > m$.

Определение 1. S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}^n(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на отрезке $\xi_l \le x < \xi_{l+1}$.

Будем минимизировать функционал Φ^l по коэффициентам a_3, a_4, a_5. Для этого продифференцируем $\Phi^l(g)$ по этим коэффициентам и приравняем нулю. Получим:

$$\begin{cases} a_3^l h^3 \sum_{k=0}^{M} k^6 + a_4^l h^4 \sum_{k=0}^{M} k^7 + a_5^l h^5 \sum_{k=0}^{M} k^8 = \sum_{k=0}^{M} \left[\left(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2 \right) k^3 \right] \\ a_3^l h^3 \sum_{k=0}^{M} k^7 + a_4^l h^4 \sum_{k=0}^{M} k^8 + a_5^l h^5 \sum_{k=0}^{M} k^9 = \sum_{k=0}^{M} \left[\left(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2 \right) k^4 \right] \\ a_3^l h^3 \sum_{k=0}^{M} k^8 + a_4^l h^4 \sum_{k=0}^{M} k^9 + a_5^l h^5 \sum_{k=0}^{M} k^{10} = \sum_{k=0}^{M} \left[\left(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2 \right) k^5 \right] \end{cases} \quad (1.3)$$

Введем обозначения:

$$S_j = \sum_{k=0}^{M} k^j, \quad c_j^l = \sum_{k=0}^{M} \left[\left(y_{ml+k} - a_0^l - a_1^l hk - a_2^l h^2 k^2 \right) k^{j+2} \right] \quad (1.4)$$

С учетом принятых обозначений (1.4) система уравнений (1.3) примет вид:

$$\begin{cases} a_3^l h^3 S_6 + a_4^l h^4 S_7 + a_5^l h^5 S_8 = c_1^l \\ a_3^l h^3 S_7 + a_4^l h^4 S_8 + a_5^l h^5 S_9 = c_2^l \\ a_3^l h^3 S_8 + a_4^l h^4 S_9 + a_5^l h^5 S_{10} = c_3^l \end{cases} \quad (1.5)$$

Коэффициенты a_0^l, a_1^l и a_2^l определяются из условий (1.1), (1.2). Для определения a_3^l, a_4^l и a_5^l решается система (1.5). Достаточно доказать, что система (1.5) имеет решение. Покажем, что определитель A матрицы системы (1.5) не равен нулю.
Обозначим

$$A = \det \begin{pmatrix} S_6 & S_7 & S_8 \\ S_7 & S_8 & S_9 \\ S_8 & S_9 & S_{10} \end{pmatrix} = S_6 \left(S_8 S_{10} - S_9^2 \right) - S_7 \left(S_7 S_{10} - S_8 S_9 \right) + S_8 \left(S_7 S_9 - S_8^2 \right) \quad (1.6)$$

Найдем формулу для A в виде полинома, зависящего от M. Воспользуемся для этого средой Mathematica 4. Результат
разложения:

$$A = \frac{1}{898128000} M^3 (M-2)(2M+1)(M+3)\big(5M^{14} + 35M^{13} + 25M^{12} - 305M^{11} - 630M^{10} +$$
$$+480M^9 + 2050M^8 + 535M^7 - 3010M^6 - 4030M^5 + 2370M^4 + 8685M^3 + 1278M^2 -$$
$$-3312M + 864\big)(M+2)^2 (M-1)^2 (M+1)^3$$

В данном случае нас интересуют только положительные вещественные корни, так как M — целое положительное число. Полученный полином имеет три положительных вещественных корня: $\{1.56081; 2; 2.55841\}$.

Теорема 1. *Для любых* $y \in \boldsymbol{R}^{N+1}$, $y'_0 \in \boldsymbol{R}$, $y''_0 \in \boldsymbol{R}$, *и* $M \geq 3$ *существует и единственен сплайн* $S_{m,M}[y](x)$.

По теореме Крамера найдем выражения для искомых коэффициентов.

$$a_3^l = \frac{1}{Ah^3} \det \begin{pmatrix} c_1^l & S_7 & S_8 \\ c_2^l & S_8 & S_9 \\ c_3^l & S_9 & S_{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{Ah^3}\left[c_1^l\left(S_8 S_{10} - S_9^2\right) - c_2^l\left(S_7 S_{10} - S_8 S_9\right) + c_3^l\left(S_7 S_9 - S_8^2\right)\right] \quad (1.7)$$

$$a_4^l = \frac{1}{Ah^4} \det \begin{pmatrix} S_6 & c_1^l & S_8 \\ S_7 & c_2^l & S_9 \\ S_8 & c_3^l & S_{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{Ah^4}\left[-c_1^l\left(S_7 S_{10} - S_8 S_9\right) + c_2^l\left(S_6 S_{10} - S_8^2\right) - c_3^l\left(S_6 S_9 - S_7 S_8\right)\right] \quad (1.8)$$

$$a_5^l = \frac{1}{Ah^5} \det \begin{pmatrix} S_6 & S_7 & c_1^l \\ S_7 & S_8 & c_2^l \\ S_8 & S_9 & c_3^l \end{pmatrix} = \frac{1}{Ah^5}\left[c_1^l\left(S_7 S_9 - S_8^2\right) - c_2^l\left(S_6 S_9 - S_7 S_8\right) + c_3^l\left(S_6 S_8 - S_7^2\right)\right] \quad (1.9)$$

где c_j^l определяется по формуле (1.4), $j = 1, 2, 3$.

2. Сходимость S-сплайна

Пусть $f(x) \in C^6[a,b]$. Пусть $f_k = f(x_k)$, $f'_0 = f'(a)$, $f''_0 = f''(a)$, $x_k = a + kh$, h — шаг сетки. Обозначим

$$\varphi(x) = f(x) - S_{m,M}(x), \quad (2.1)$$

$$p_l = \varphi(\xi_l) = f(\xi_l) - g_l(0),$$

$$q_l = h\varphi'(\xi_l) = h\left(f'(\xi_l) - \left.\frac{dg_l}{dx}\right|_{x=0} \right), \tag{2.2}$$

$$r_l = h^2\varphi''(\xi_l) = h^2\left(f''(\xi_l) - \left.\frac{d^2 g_l}{dx^2}\right|_{x=0} \right).$$

1. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\varphi(x) = a_{11}(x)p_l + a_{12}(x)q_l + a_{13}r_l + w_1(x) + \Theta_1(x),$$

$$h\varphi'(x) = a_{21}(x)p_l + a_{22}(x)q_l + a_{23}r_l + w_2(x) + \Theta_2(x), \tag{2.3}$$

$$h^2\varphi''(\xi_l) = a_{31}(x)p_l + a_{32}(x)q_l + a_{33}r_l + w_3(x) + \Theta_3(x)$$

для $x \ge \xi_l$, $l = 0,1,\ldots,L-1$, где

$$a_{12}(x) = \frac{x-\xi_l}{h} - \frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{478} - \frac{(x-\xi_l)^4}{Ah^4}T_{648} - \frac{(x-\xi_l)^5}{Ah^5}T_{674},$$

$$a_{11}(x) = 1 - \frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{378} - \frac{(x-\xi_l)^4}{Ah^4}T_{638} - \frac{(x-\xi_l)^5}{Ah^5}T_{673},$$

$$a_{13}(x) = \frac{(x-\xi_l)^2}{2h^2} - \frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{578} - \frac{(x-\xi_l)^4}{Ah^4}T_{658} - \frac{(x-\xi_l)^5}{Ah^5}T_{675},$$

$$a_{21}(x) = -3\frac{(x-\xi_l)^2}{Ah^2}T_{378} - 4\frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{638} - 5\frac{(x-\xi_l)^4}{Ah^4}T_{673},$$

$$a_{22}(x) = 1 - 3\frac{(x-\xi_l)^2}{Ah^2}T_{478} - 4\frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{648} - 5\frac{(x-\xi_l)^4}{Ah^4}T_{674}. \tag{2.4}$$

$$a_{23}(x) = \frac{(x-\xi_l)}{h} - 3\frac{(x-\xi_l)^2}{Ah^2}T_{578} - 4\frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{658} - 5\frac{(x-\xi_l)^4}{Ah^4}T_{675}$$

$$a_{31}(x) = -6\frac{x-\xi_l}{Ah}T_{378} - 12\frac{(x-\xi_l)^2}{Ah^2}T_{638} - 20\frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{673}$$

$$a_{32}(x) = -6\frac{x-\xi_l}{Ah}T_{478} - 12\frac{(x-\xi_l)^2}{Ah^2}T_{648} - 20\frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{674}$$

$$a_{33}(x) = 1 - 6\frac{x-\xi_l}{Ah}T_{578} - 12\frac{(x-\xi_l)^2}{Ah^2}T_{658} - 20\frac{(x-\xi_l)^3}{Ah^3}T_{675}$$

$$w_1(x)=\frac{f^{VI}(\xi_l)}{6!}\left(-\frac{T_{978}}{A}h^3(x-\xi_l)^3-\frac{T_{698}}{A}h^2(x-\xi_l)^4-\frac{T_{679}}{A}h(x-\xi_l)^5+(x-\xi_l)^6\right)$$

$$w_2(x)=\frac{f^{VI}(\xi_l)}{6!}\left(-3\frac{T_{978}}{A}h^4(x-\xi_l)^2-4\frac{T_{698}}{A}h^3(x-\xi_l)^3-5\frac{T_{679}}{A}h^2(x-\xi_l)^4+6h(x-\xi_l)^5\right) \quad (2.5)$$

$$w_3(x)=\frac{f^{VI}(\xi_l)}{6!}\left(-6\frac{T_{978}}{A}h^5(x-\xi_l)-12\frac{T_{698}}{A}h^4(x-\xi_l)^2-20\frac{T_{679}}{A}h^3(x-\xi_l)^3+30h^2(x-\xi_l)^4\right)$$

Функции $\Theta_i(x)/h^7\to 0$ при $h\to 0$ для $\xi_l\le x\le \xi_l+Mh$. Здесь S_j, A определены формулами (8), (11),

$$T_{ijk}=\begin{vmatrix} S_i & S_j & S_k \\ S_{i+1} & S_{j+1} & S_{k+1} \\ S_{i+2} & S_{j+2} & S_{k+2} \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

2. *Если* $f_k=P(x_k)$, $f_0'=P'(a)$ *и* $f_0''=P''(a)$, *где* $P(x)$ — *полином степени не выше 5, то* $S_{m,M}[y](x)\equiv P(x)$.

3. *Если*

$$|p_l|\le C_1h^6,\ |q_l|\le C_2h^6,\ |r_l|\le C_3h^6, \quad (2.7)$$

то

$$|\varphi(x)|\le C_4h^6,\ |\varphi'(x)|\le C_5h^6,\ |\varphi''(x)|\le C_6h^6 \quad (2.8)$$

для $x\in[\xi_l,\xi_l+Mh]$, *где константы* C_4,C_5,C_6 *не зависят от* h.

Обозначим $\overline{z}_l=(p_l,q_l,r_l)$, $\overline{d}_l=\left(w_1^l(mh),w_2^l(mh),w_3^l(mh)\right)$,

$U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}$, где $u_{ij}=a_{ij}(mh)$. Причем U — постоянная матрица, она не зависит от свойств функции $f(x)$. Матрицу U будем называть матрицей устойчивости.

4. *Имеет место следующее рекуррентное соотношение*

$$\overline{z}_{l+1}=U\overline{z}_l+\overline{d}_l+o\left(h^7\right) \quad (2.9)$$

Здесь

$$u_{11} = 1 - \frac{T_{378}}{A} m^3 - \frac{T_{638}}{A} m^4 - \frac{T_{673}}{A} m^5$$

$$u_{12} = m - \frac{T_{478}}{A} m^3 - \frac{T_{648}}{A} m^4 - \frac{T_{674}}{A} m^5$$

$$u_{13} = \frac{1}{2} m^2 - \frac{T_{578}}{A} m^3 - \frac{T_{658}}{A} m^4 - \frac{T_{675}}{A} m^5$$

$$u_{21} = -3\frac{T_{378}}{A} m^2 - 4\frac{T_{638}}{A} m^3 - 5\frac{T_{673}}{A} m^4$$

$$u_{22} = 1 - 3\frac{T_{478}}{A} m^2 - 4\frac{T_{648}}{A} m^3 - 5\frac{T_{674}}{A} m^4 \tag{2.10}$$

$$u_{23} = m - 3\frac{T_{578}}{A} m^2 - 4\frac{T_{658}}{A} m^3 - 5\frac{T_{675}}{A} m^4$$

$$u_{23} = m - 3\frac{T_{578}}{A} m^2 - 4\frac{T_{658}}{A} m^3 - 5\frac{T_{675}}{A} m^4$$

$$u_{31} = -6\frac{T_{378}}{A} m - 12\frac{T_{638}}{A} m^2 - 20\frac{T_{673}}{A} m^3$$

$$u_{32} = -6\frac{T_{478}}{A} m - 12\frac{T_{648}}{A} m^2 - 20\frac{T_{674}}{A} m^3$$

$$u_{33} = 1 - 6\frac{T_{578}}{A} m - 12\frac{T_{658}}{A} m^2 - 20\frac{T_{675}}{A} m^3$$

$$d_1 = \frac{f^{VI}(\xi_l)}{6!} h^6 \left(-\frac{T_{978}}{A} m^3 - \frac{T_{698}}{A} m^4 - \frac{T_{679}}{A} m^5 + m^6 \right)$$

$$d_2 = \frac{f^{VI}(\xi_l)}{6!} h^6 \left(-3\frac{T_{978}}{A} m^2 - 4\frac{T_{698}}{A} m^3 - 5\frac{T_{679}}{A} m^4 + 6m^5 \right)$$

$$d_3 = \frac{f^{VI}(\xi_l)}{6!} h^6 \left(-6\frac{T_{978}}{A} m - 12\frac{T_{698}}{A} m^2 - 20\frac{T_{679}}{A} m^3 + 30m^4 \right)$$

Пусть $f(x) \in C^6[a,b]$. Будем предполагать, что условия (3) выполнены так, что

$$a_0^0 = y_0 = f(a) + o(h^6),$$
$$a_0^1 = y_0' = f'(a) + o(h^5), \qquad (2.11)$$
$$a_0^2 = y_0'' = f''(a) + o(h^4)$$

где $o(h^j)/h^j \to 0$ при $h \to 0$ для $j = 4,5,6$. Выполнение условий (2.11) может быть обеспечено, например, если функция задана своими значениями в узлах сетки, а значения производных в начальной точке вычисляются с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка.

Лемма 5. *Если выполнены предположения (2.11) и, кроме того, собственные числа матрицы U удовлетворяют условию*

$$|\lambda_1| < 1,\ |\lambda_2| < 1,\ |\lambda_3| < 1 \qquad (2.12)$$

то справедливы оценки (2.7), где константы C_1, C_2, C_3 *не зависят от l, h.*

Доказательство. Из (2.9) следует, что $\overline{z}_{l+1} = \sum_{k=0}^{l} U^k d_{l-k} + U^{l+1}\overline{z}_0$.

Отсюда

$$\|\overline{z}_{l+1}\| \le \sum_{k=0}^{l} \|U^k\| \|d_{l-k}\| + \|U^{l+1}\| \|\overline{z}_0\| \le C_7 h^6 + C_8 \max_{[a,b]} |f^{Vi}| h^6 \sum_{k=0}^{l} \rho_k,$$

$\rho_k = \|U^k\|$ Из (2.12) следует, что

$$\rho_k \le C_9 \lambda_{\max}^k, \sum_{k=0}^{l} \rho_k \le \frac{C_9}{1-\lambda_{\max}}, \text{ где } \lambda_{\max} = \max\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\right),.$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in C^6[a,b]$ *и пусть выполнены предположения (2.11).Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U удовлетворяют условию (2.12). Тогда сплайн* $S_{m,M}^5(x)$ *с узлами на равномерной сетке* $\xi_l = a + lH$ *имеет* *дефект три (то есть $S^5_{m,M}(x) \in C^2$) и для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:*

$$\left|\varphi^{(p)}(x)\right| = \left|f^{(p)}(x) - S^5_{m,M}(x)\right| \le C_p h^{6-p}, \tag{2.13}$$

$p = 0,1,2,3,4,5$; $x \ne \xi_l$ при $p = 3,4,5$; $\varphi^{(p)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(p)}(\xi_l + O)$.

Таким образом, сходимость S-сплайнов к функции $f(x) \in C^6[a,b]$ и наличие оценки (2.13) зависят от величины собственных чисел матрицы U.

3. Устойчивость S-сплайна

Собственные числа матрицы U определяются из уравнения

$$-\lambda^3 + \mathrm{tr}\,U\lambda^2 - \left(\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{23}\right)\lambda + \det U = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathrm{tr}\,U = u_{11} + u_{22} + u_{33}$, $\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} u_{ii} & u_{ij} \\ u_{ji} & u_{jj} \end{vmatrix}$, $\det U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$.

Показано, что при больших значениях M и при значениях параметра $\zeta = m/M$ близких к 1 наибольшее влияние оказывает $\det U$. При этом S-сплайн аппроксимация не будет устойчивой. Для случая малых значений M был проведен численный расчет, были получены значения собственных чисел матрицы U для $3 \le M \le 100$ и $1 \le m \le M$.

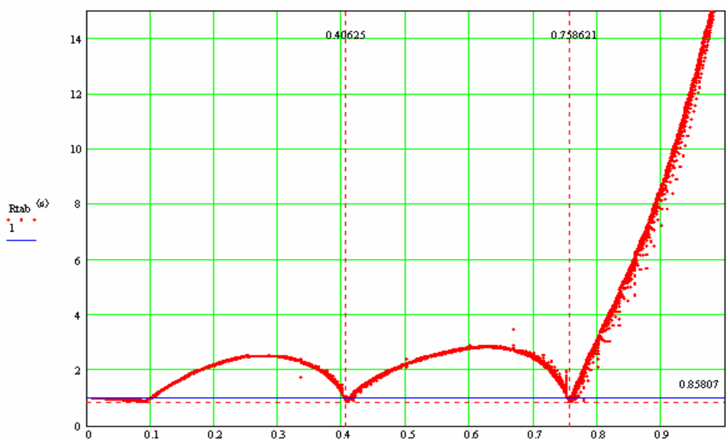

Рис.1 Распределение $|\lambda_{\max}|$ матрицы U в зависимости от величины $\zeta = m/M$

Распределение модуля максимального собственного числа $|\lambda_{\max}|$ матрицы устойчивости U в зависимости от величины ζ приведено на графике. В следующей таблице приведены некоторые значения m и M, при которых аппроксимация дважды непрерывно-дифференцируемыми S-сплайнами пятого порядка устойчива.

Собственные числа матрицы U

M	m	λ_1	λ_2	λ_3	max $\lvert\lambda_i\rvert$	m/M
9	7	0,36675+0,80084i	0,36675-0,80084i	-0,80891	0,88082	0,77778
10	1	0,83413+0,22689i	0,83413-0,22689i	-0,96309	0,96309	0,1
11	1	0,84991+0,20987i	0,84991-0,20987i	-0,81549	0,87544	0,09091
12	1	0,86292+0,19527i	0,86292-0,19527i	-0,68813	0,88473	0,08333
12	5	-0,50833+0,73920i	-0,50833-0,73920i	-0,78835	0,89712	0,41667
13	1	0,87383+0,18260i	0,87383-0,18260i	-0,57724	0,8927	0,07692
14	1	0,88312+0,17149i	0,88312-0,17149i	-0,47986	0,89961	0,07143
15	1	0,89113+0,16166i	0,89113-0,16166i	-0,39371	0,90567	0,06667
16	1	0,89811+0,15291i	0,89811-0,15291i	-0,31697	0,91103	0,0625
17	1	0,90424+0,14507i	0,90424-0,14507i	-0,2482	0,9158	0,05882
17	7	-0,43726+0,70427i	-0,43726-0,70427i	-0,93814	0,93814	0,41176
18	1	0,90968+0,13799i	0,90968-0,13799i	-0,18621	0,92008	0,05556
19	1	0,91453+0,13157i	0,91453-0,13157i	-0,13007	0,92394	0,05263
20	1	0,91888+0,12573i	0,91888-0,12573i	-0,07899	0,92745	0,05
20	2	0,83248+0,22869i	0,83248-0,22869i	-0,97687	0,97687	0,1

В работе принимал участие студент ВМК С.В.Прошин.

Список литературы:

1. Груздев В.А., Силаев Д.А. Некоторые математические вопросы автоматизированной обработки фотографических изображений. — В кн.: Некоторые вопросы математики и механики. М.: Изд-во МГУ, 1981, с.52.
2. Силаев Д.А., Якушина Г.И. Приближение S-сплайнами гладких функций. В кн.: Труды семинара имени И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, в. 10, 1984, с. 197-206.

TWICE CONTINUOUSLY DIFFERENTIABLE S-SPLINES

Silaev D. A.

(Russia, Moscow)

In the article are presented the twice continuously differentiable S-splines, consisting from quintic polynomials. It is proved unique existence theorem and derived the condition of stability for such splines. First three coefficients of every polynomial of these splines are defined by "smooth glueing" conditions, but three rest coefficients are defined by the method of least squares. This provides their splines attribute to smooth source information. The particularity of these splines is its semi-locality i.e. each polynomial is implicitly defines on the value of functions, which participate for definition of the previous polynomials, and does not depend on values of functions defining the following polynomials. In this case the condition of stability is executed under hard limiting conditions (they can be enumerated in table).

When the condition of stability is valid and the first polynomial of these splines approximates the given function, the spline approximates this function on all base interval.