

# ПРИМЕНЕНИЕ S-СПЛАЙНОВ

Силаев Д. А., Коротаев Д. О.

(Россия, Москва)

*В данной работе рассматривается применение полулокальных сглаживающих сплайнов или S-сплайнов. Эти сплайны строятся исходя из условий гладкой склейки полиномов и метода наименьших квадратов. Особенностью этих сплайнов является их полулокальность (т.е. каждый полином учитывает все предыдущие значения функции и не учитывает следующие за ним). На основе таких сплайнов строятся базисные сплайны, которые позволяют рассматривать функцию в виде линейного разложения по базисным сплайнам. Базисные сплайны применяются для аппроксимации функций, решения дифференциальных уравнений (методом Галеркина) и получения квадратурных формул. Аналогично строится S-сплайн на круге, что позволяет решать аналогичные задачи для круга и более сложных областей.*

## 1. Одномерный S-сплайн

Рассмотрим на отрезке  $[a, b]$  равномерную сетку  $\{x_k\}_{k=0}^{k=K}$ ,  $x_k = a + kh$ ,  $h$  — шаг сетки. Рассмотрим на  $[a, b]$  ещё одну равномерную сетку  $\{\xi_l\}_{l=0}^{l=L}$ ,  $\xi_l = a + lH$ ,  $H = mh, m \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $y = (y_0, y_1, \dots, y_K) \in \mathbf{R}^{K+1}$  и  $y'_0 \in \mathbf{R}$ .

Обозначим  $SP^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 + \sum_{j=2}^n a_j x^j \right\}$  множество

полиномов степени  $n$  с фиксированными коэффициентами

$a_0, a_1$ . Рассмотрим функционал:  $\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^M (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2$ .

В классе  $SP^n$  ищется такой полином, который минимизирует  $\Phi^l$  и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^0 = y_0, a_1^0 = y'_0, \quad (1.1)$$

$$a_l^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H), a_1^l = g'_{l-1}(H). \quad (1.2)$$

Так как  $a_0^l = g_l(0)$  и  $a_1^l = g'_l(0)$ , то условия (1.2) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов.

**Определение 1.** S-сплайном назовем функцию  $S_{m,M}^n(x)$ , которая совпадает с полиномом  $g_l(x)$  на отрезке  $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$ .

**Определение 2.** Периодическим S-сплайном называется S-сплайн, являющийся периодической функцией на отрезке  $[a, b]$ . Предположение периодичности означает замену условия (1.1) на следующее:

$$a_0^0 = g_{L-1}(H), a_1^0 = g'_{L-1}(H) \quad (1.3)$$

Здесь  $L$  – число полиномов, составляющих сплайн.

Метод наименьших квадратов дает нам следующие уравнения:

$$\begin{cases} S_2 a_0^l + S_3 a_1^l h + S_4 a_2^l h^2 + S_5 a_3^l h^3 = P_1^l \\ S_3 a_0^l + S_4 a_1^l h + S_5 a_2^l h^2 + S_6 a_3^l h^3 = P_2^l \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$S_j = \sum_{k=0}^M k^j, P_j^l = \sum_{k=0}^M y_{ml+k} k^{j+1}. \quad (1.5)$$

Сделаем замену переменных  $\tilde{a}_i = a_i h^i, i = 0, 1, 2, 3$ . При этом уравнения (1.2) и (1.4) преобразуются в следующие:

$$\begin{cases} \tilde{a}_0^{l-1} + m \tilde{a}_1^{l-1} + m^2 \tilde{a}_2^{l-1} + m^3 \tilde{a}_3^{l-1} = \tilde{a}_0^l \\ \tilde{a}_1^{l-1} + 2m \tilde{a}_2^{l-1} + 3m^2 \tilde{a}_3^{l-1} = \tilde{a}_1^l \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} S_2 \tilde{a}_0^l + S_3 \tilde{a}_1^l + S_4 \tilde{a}_2^l + S_5 \tilde{a}_3^l = P_1^l \\ S_3 \tilde{a}_0^l + S_4 \tilde{a}_1^l + S_5 \tilde{a}_2^l + S_6 \tilde{a}_3^l = P_2^l \end{cases} \quad (1.7)$$

Для непериодического сплайна первые две строки заменяются на стартовые условия (1.1). Матрица системы имеет блочный вид. Дальнейшее исследование матрицы системы показывает, что система распадается на систему размерности  $2L \times 2L$ , из

которой находятся первый и второй коэффициенты полиномов. Остальные два коэффициента определяются из метода наименьших квадратов (1.4). Все эти преобразования приведены в [3].

В [2] и [3] доказано существование и единственность непериодического и периодического S-сплайна. При  $m < M\zeta_*$  (здесь  $\zeta_* \approx 0.93$ ) S-сплайн устойчив.

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in C^4[a, b]$  - периодическая функция и пусть выполнены предположения  $|f(x_k) - f_k| \leq Ch^{4+\varepsilon}$ , где константа  $C$  не зависит от  $h$ . Пусть, кроме того выполнены условия устойчивости. Тогда периодический сплайн  $S_{m,M}(x)$  с узлами на сетке  $\xi_i = a + iH$  имеет дефект два (т.е.  $S_{m,M}^3(x) \in C^1[a, b]$ ), и для  $x \in [a, b]$  справедливы следующие оценки:

$$|f^{(p)}(x) - S_{m,M}^{(p)}(x)| \leq C_p h^{4-p}, \quad p = 0, 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

В непериодическом случае в условия теоремы добавляется условие:  $|f'(0) - f'_0| \leq Ch^{3+\varepsilon}$

## 2. Построение сплайна на круге

### 2.1. Построение $\varphi - r$ -сплайна

Будем рассматривать на единичном круге полярные сетки :

$$\{\varphi_i = i h_1, i = 0, 1, \dots, K_1\}, \{\Phi_k = k H_1, k = 0, \dots, L_1\}, H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = 2\pi, \\ \{r_j = j h_2, j = 0, 1, \dots, K_2\}, \{R_l = l H_2, l = 0, \dots, L_2\}, H_2 = m_2 h_2, K_2 = m_2 L_2, K_2 h_2 = 1.$$

Будем строить аппроксимацию функции  $f(\varphi, r)$  на круге при условии, что функция  $f$  имеет 4 производных по переменным  $r$  и  $\varphi$ , то есть  $f \in C^4[0, 1] \times [0, 2\pi]$ . Пусть  $\{y_{ij} = f(\varphi_i, r_j), i = 0, \dots, K_1, j = 0, \dots, K_2\}$  - значения в узлах сетки, по которым будет проводиться аппроксимация. При каждом  $j = 1, \dots, K_2$  построим периодический S-сплайн  $S_j(\varphi)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  по начальным данным  $\{y_{ij}, i = 0, \dots, K_1\}$ . Каждый из этих

сплайнов аппроксимирует функцию  $f(\varphi, r_j)$  на окружности с радиусом  $r_j$ , причем в силу теоремы о сходимости

$$\left| S_j^{(p)}(\varphi) - \frac{\partial^p f(\varphi, r_j)}{\partial \varphi^p} \right| < Ch_1^{4-p}, \varphi \in [0, 2\pi], p = 0, 1, 2, 3.$$

Далее, фиксируем произвольное  $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi]$ . Рассмотрим набор  $\{z_j = S_j(\tilde{\varphi}), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}$ . Обозначим  $z'_0$  - значение, получаемое по некоторому алгоритму по набору  $\{z_j\}$ , которое приближает  $f'_r(r, \tilde{\varphi})|_{r=0}$  с порядком не ниже третьего.

Например,

$$z'_0 = \frac{1}{h_2} \left[ 3(z_1 - z_0) - \frac{3}{2}(z_2 - z_0) + \frac{1}{3}(z_3 - z_0) \right] \quad (2.1)$$

- приближение производной с третьим порядком аппроксимации.

По набору  $\{z_j\}$  и  $z'_0$  строим  $S_{\tilde{\varphi}}(r)$  - непериодический S-сплайн на отрезке  $[0, 1]$ . Будем считать, что  $m_2 < M_2 \zeta_*$ . Тогда, построенный для  $\tilde{\varphi}$  сплайн  $S_{\tilde{\varphi}}(r)$  будет аппроксимировать функцию  $f(\tilde{\varphi}, r)$  при  $r \in [0, 1]$ .

**Определение 3.** Назовем  $\varphi$ - $r$  сплайном функцию  $S(\varphi, r)$ , значение которой при любом  $r$  и  $\varphi$  определяется по следующему алгоритму: по набору  $\{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}$ ,  $z'_0$  строим  $S_{\varphi}(r)$ , затем полагаем  $S(\varphi, r) = S_{\varphi}(r)$ .

По другому:  $S(\varphi, r) = \{S_{\varphi}(r) | \{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}\}$ .

Очевидно, что этот сплайн можно дифференцировать по  $r$  3 раза в любой точке, не принадлежащей сетке, то есть при  $r \neq R_j$ . При  $r = R_j$  определим производную следующим образом:

$$\frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} S(\varphi, r + 0), \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

**Определение 4.** Назовем  $p$ -й производной по  $\varphi$  от  $\varphi - r$ -сплайна ( $p = 1, 2, 3$ ) функцию  $\frac{\partial^p}{\partial \varphi^p} S(\varphi, r)$  на единичном круге, которая равна  $\varphi - r$ -сплайну, построенному по набору

$$\left\{ z_j = \frac{d^p}{d\varphi^p} S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = 0 \right\}, \quad p = 1, 2, 3.$$

Как и в случае с производной по  $r$ , под производной по  $\varphi$  в точках  $\varphi = \Phi_k$  понимается значение в точке  $\varphi = \Phi_k + 0$ .

Наконец, можно ввести понятие смешанной производной :

**Определение 5.** Под смешанной производной  $\frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r), 0 \leq p + q \leq 3$  понимается  $q$ -я производная по  $r$  от  $p$ -й производной по  $\varphi$  от  $S(\varphi, r)$ , где производные трактуются согласно определениям 3, 4.

## 2.2. Сходимость $\varphi - r$ -сплайна.

Обозначим  $h = \max(h_1, h_2)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $m_1 < M_{1\zeta_*}$ ,  $m_2 < M_{2\zeta_*}$  и  $f \in C^4[0, 1] \times [0, 2\pi]$

Тогда для  $\varphi - r$ -сплайна  $S(\varphi, r)$  справедливы оценки :

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} S(\varphi, r) - \frac{\partial^{p+q}}{\partial \varphi^p \partial r^q} f(\varphi, r) \right| < C_{pq} h^{4-p-q}, \quad \text{где } 0 \leq p + q \leq 3, \quad p, q \geq 0.$$

### 2.3. Результаты численных расчетов

Тесты проводились на функции  $f_1(\varphi, r) = r^2 \sin 2\varphi e^{-r^2}$ ,  $m_1 = m_2 = 3$  и  $M_1 = M_2 = 4$ . В приведенной ниже таблице к - отношение точности предыдущего эксперимента (предыдущая строка) к точности данного.

| $L_1 = L_2$ | $f_1$                   | $\frac{\partial}{\partial \varphi} f_1$ | $\frac{\partial}{\partial r} f_1$ | $\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} f_1$ |                        |       |                        |       |
|-------------|-------------------------|---|-----------------------------------|--|------------------------|-------|------------------------|-------|
|             | Точность                | к                                       | 8                                 | к  | Точность               | к     | точность               | К     |
| 12          | $6.297 \times 10^{-4}$  |   | $1.031 \times 10^{-3}$            |  | $7.652 \times 10^{-3}$ |       | $1.222 \times 10^{-2}$ |       |
| 24          | $3.952 \times 10^{-5}$  | 15.933                                  | $6.759 \times 10^{-5}$            | 15.259   | $9.406 \times 10^{-4}$ | 8.135 | $1.502 \times 10^{-3}$ | 8.140 |
| 48          | $2.457 \times 10^{-6}$  | 16.084                                  | $4.648 \times 10^{-6}$            | 14.541   | $1.198 \times 10^{-4}$ | 7.854 | $1.912 \times 10^{-4}$ | 7.855 |
| 96          | $1.535 \times 10^{-7}$  | 16.012                                  | $3.617 \times 10^{-7}$            | 12.851   | $1.504 \times 10^{-5}$ | 7.963 | $2.401 \times 10^{-5}$ | 7.963 |
| 192         | $9.590 \times 10^{-9}$  | 16.003                                  | $3.330 \times 10^{-8}$            | 10.860   | $1.882 \times 10^{-6}$ | 7.991 | $3.004 \times 10^{-6}$ | 7.991 |
| 384         | $5.993 \times 10^{-10}$ | 16.001                                  | $4.129 \times 10^{-9}$            | 8.066  | $2.353 \times 10^{-7}$ | 7.998 | $3.757 \times 10^{-7}$ | 7.997 |

## 3. Применение S-сплайнов

### 3.1. Получение S-сплайна на круге как явной функции двух переменных

Базисный S-сплайн  $B_j(x)$  - это периодический или непериодический S-сплайн, построенный по начальным данным следующего вида:  $\{\tilde{y}_i = \delta_{ij}, i = 0, \dots, K\}$ .

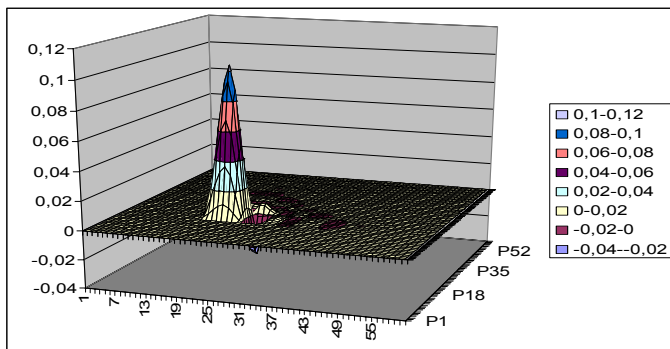
Легко видеть, что линейная комбинация  $\sum_{j=0}^K y_j B_j(x) = S(x)$

является S-сплайном, приближающим начальные данные  $\{y_i, i = 0, \dots, K\}$ . Фиксируем некоторую полярную сетку на круге  $\{\varphi_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, K_1\}$ ,

$$\{\Phi_k = kH_1, k = 0, \dots, L_1\}, H_1 = m_1 h_1, K_1 h_1 = 2\pi,$$

$$\{r_j = jh_2, j = 0, 1, \dots, K_2\},$$

$$\{R_l = lH_2, l = 0, \dots, L_2\}, H_2 = m_2h_2, K_2 = m_2L_2, K_2h_2 = 1.$$



Пример двумерного базисного S-сплайна.

Будем обозначать базисные сплайны по  $\varphi$  как  $C_i(\varphi)$ , а базисные сплайны по аргументу  $r$  как  $D_j(r)$ .

$$\begin{aligned} S(\varphi, r) &= \{S_\varphi(r) \mid \{z_j = S_j(\varphi), j = 1, \dots, K_2, z_0 = y_{00}\}\} = S_\varphi(r) = \\ &= \sum_{j=0}^{K_2} z_j D_j(r) = \sum_{j=0}^{K_2} D_j(r) \sum_{i=0}^{K_1} y_{ij} C_i(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r) \end{aligned}$$

Предпоследнее равенство следует из определения набора  $\{z_j = S_j(\varphi)\}$  и разложения по базисным сплайнам

$$S_j(\varphi) = \sum_{i=0}^{K_1} y_{ij} C_i(\varphi).$$

Теперь рассмотрим укрупненную сетку

круга  $\{\Phi_k = kH_1, k = 0, \dots, L_1\}$ , где  $H_1 = m_1h_1$  и  $\{R_l = lH_2, l = 0, \dots, L_2\}$ , где  $H_2 = m_2h_2$ . Рассмотрим вид S-сплайна в некотором произвольном секторе этой сетки:

$$\varphi = kH_1 + \tilde{\varphi}, r = lH_2 + \tilde{r}, \text{ где } |\tilde{\varphi}| \leq H_1 \text{ и } |\tilde{r}| \leq H_2 \quad (3.2)$$

В этом секторе BS-сплайны согласно определению S-сплайна представляются в виде полиномов третьей степени:

$$C_i(\varphi) = \sum_{p=0}^3 c_{pk}^i \tilde{\varphi}^p, D_j(r) = \sum_{q=0}^3 c_{ql}^j \tilde{r}^q$$

Подставляя эти выражения в формулу для  $S(\varphi, r)$  и меняя порядок суммирования, получим:

$$S(\varphi, r) = \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} \sum_{p=0}^3 c_{pk}^i \tilde{\varphi}^p \sum_{q=0}^3 d_{ql}^j \tilde{r}^q = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 \tilde{\varphi}^p \tilde{r}^q \left( \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} c_{pk}^i d_{ql}^j \right) = \sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^3 a_{pq}^{kl} \tilde{\varphi}^p \tilde{r}^q \quad (3.3)$$

### 3.2. Решение дифференциальных уравнений при помощи S-сплайнов

Применим метод Галеркина для решения дифференциальных уравнений с использованием В-сплайнов. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y'' - y = \sin(2\pi x), x \in (0, 1) \quad (3.4)$$

$$y(0) = y(1), y'(0) = y'(1) \text{ или } y(0) = 1, y(1) = 0 \quad (3.5)$$

Решение системы представим в виде разложения по базисным сплайнам:  $y(x) = y_i B^i(x)$

Подставляем это разложение в исходное уравнение и, следуя методу Галеркина, умножаем скалярно уравнение на каждый внутренний базисный сплайн  $B^j(x)$ :

$$y_i \sum_{k=0}^{L-1} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} B'''(x) B^j(x) - B^i(x) B^j(x) dx = \int_0^1 \sin(2\pi x) B^j(x) dx \quad (3.6)$$

Интегрируя по частям первую часть подынтегрального выражения, получаем систему линейных уравнений:

$$y_i \int_0^1 B''(x) B^j(x) + B^i(x) B^j(x) dx + \int_0^1 \sin(2\pi x) B^j(x) dx = y_i \sum_{k=0}^{L-1} B''(x) B^j(x) \Big|_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} = y_i B''(x) B^j(x) \Big|_0^1$$

В случае неперриодической задачи (3.6) к этой системе добавляются граничные условия:

$$y_i B^i(0) = 1, y_i B^i(1) = 0 \quad (3.7)$$

Заметим, что граничные условия периодической задачи выполнены автоматически, поскольку мы представляли



решение в виде разложения по периодическим сплайнам. Результаты расчетов приведены в следующей таблице:

| непериодическое решение |                        |      | периодическое решение |                        |       |
|-------------------------|------------------------|------|-----------------------|------------------------|-------|
| L - число полиномов     | Точность $\approx k$   |      | L - число Полиномов   | точность $\approx k$   |       |
| 6                       | $1.07 \times 10^{-4}$  |      | 6                     | $2.53 \times 10^{-5}$  |       |
| 2*6=12                  | $4.32 \times 10^{-6}$  | 24.8 | 2*6=12                | $2.35 \times 10^{-6}$  | 10.8  |
| 2*12=24                 | $1.56 \times 10^{-7}$  | 27.6 | 2*12=24               | $1.57 \times 10^{-7}$  | 14.9  |
| 2*24=48                 | $9.92 \times 10^{-9}$  | 15.8 | 2*24=48               | $1.001 \times 10^{-8}$ | 15.7  |
| 2*48=96                 | $6.23 \times 10^{-10}$ | 15.9 | 2*48=96               | $6.24 \times 10^{-10}$ | 15.93 |

### 3.3. Решение уравнения Пуассона на квадрате при помощи S-сплайнов

Теперь перенесем наши рассуждения на двумерный случай. Рассмотрим периодическое решение задачи Пуассона на квадрате.

$$\Delta u = p(x, y), x \in (A_1, B_1), y \in (A_2, B_2), u(0, 0) = u_0 \quad (3.8)$$

Возьмем для примера  $p(x, y) = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1)\sin(y)$ ,  $A_1 = A_2 = 0$ ,

$B_1 = B_2 = 2\pi$ . Ищем  $u$  в виде разложения  $u(x, y) = y_{ij} B^{ij}(x, y)$  и

подставим его в уравнение (3.8):

$$u_{ij} \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) B^{ij}(x, y) \right\} = p(x, y) \quad (3.9)$$

Подобно п.3.2, умножаем скалярно правую и левую части (3.9) на каждый из внутренних базисных сплайнов квадрата  $B^{kl}$  и, пользуясь формулой Грина, преобразуем полученное уравнение к виду:

$$u_{ij} \left\{ \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \frac{\partial^2 B^{ij}(x, y)}{\partial x^2} B^{kl}(x, y) + \frac{\partial^2 B^{ij}(x, y)}{\partial y^2} B^{kl}(x, y) dx dy \right\} = \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} p(x, y) B^{kl} dx dy \quad (3.10)$$

$$u_{ij} \left\{ \left( \int_{A_2}^{B_1} \frac{\partial B^{ij}(x,y)}{\partial x} B^{kl}(x,y) dy \right) \Big|_{A_1}^{B_1} + \left( \int_{A_1}^{B_1} \frac{\partial B^{ij}(x,y)}{\partial y} B^{kl}(x,y) dx \right) \Big|_{A_2}^{B_2} \right\} - \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \frac{\partial}{\partial x} B^{ij}(x,y) \frac{\partial}{\partial x} B^{kl}(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} B^{ij}(x,y) \frac{\partial}{\partial y} B^{kl}(x,y) dx dy = \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} p(x,y) B^{kl} dx dy \quad (3.11)$$

Последняя система линейных уравнений, дополненная уравнением:  $u_{ij} B^{ij}(0,0) = u_0$

является полной и используется для нахождения неизвестных  $\{u_{ij}\}$ . Решение уравнения Пуассона:  $\Delta u = 2 + \sin x \sin y$

| $1.5^4 = 5.0625$    |                         |             | $2^4 = 16$          |                        |             |
|---------------------|-------------------------|-------------|---------------------|------------------------|-------------|
| L - число полиномов | Точность                | $\approx k$ | L - число полиномов | Точность               | $\approx k$ |
| 4                   | $8.6 \times 10^{-2}$    |             | 2                   | $1.997 \times 10^{-2}$ |             |
| $1.5 * 4 = 6$       | $1.8 \times 10^{-3}$    | 4.8         | $2 * 2 = 4$         | $8.6 \times 10^{-3}$   | 2.32        |
| $1.5 * 6 = 9$       | $5.46 \times 10^{-4}$   | 3.28        | $2 * 4 = 8$         | $8.67 \times 10^{-4}$  | 9.93        |
| $1.5 * 9 = 14$      | $1.0001 \times 10^{-4}$ | 5.45        | $2 * 8 = 16$        | $6.27 \times 10^{-5}$  | 13.78       |

### 3.4. Получение квадратурных формул для одномерных интегралов

Подставим выражение сплайна через базисные сплайны в

интеграл 
$$\int_A^B S(x) dx = \int_A^B \sum_{k=0}^K y_k B_k(x) dx = \sum_{k=0}^K y_k \int_A^B B_k(x) dx = \sum_{k=0}^K y_k c_k,$$

где  $c_k = \int_A^B B_k(x) dx = \sum_{n=0}^{L-1} \sum_{i=0}^3 \frac{a_i^{n,k}}{i+1} H^{i+1}$  - искомые коэффициенты

квадратуры. Здесь  $a_i^{n,k}$  -  $i$ -й коэффициент  $n$ -го полинома в  $k$ -м базисном сплайне (т.е. построенном по набору начальных данных  $\{y_i = \delta_{ik}, i = 0, \dots, K\}$ ). Эти формулы имеют 4-й порядок аппроксимации.

### 3.5. Получение квадратурных формул для двумерных интегралов

Подставим в интеграл выражение для  $\varphi - r$  сплайна в виде (3.1)

:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} S(\varphi, r) dr d\varphi = \sum_{k=0}^{K_1} \sum_{l=0}^{K_2} y_{kl} \int_0^1 C_k(\varphi) \int_0^{2\pi} D_l(r) dr d\varphi = \sum_{k=0}^{K_1} \sum_{l=0}^{K_2} c_k \tilde{c}_l y_{kl},$$

где  $\tilde{c}_l = \int_0^1 B_l(r) dr = \sum_{n=0}^{L_2-1} \sum_{i=0}^3 \frac{\tilde{a}_i^{n,l}}{i+1} H_2^{i+1}$ ,  $H_2 = \frac{1}{L_2}$ , а  $\tilde{a}_i^{n,l}$  -  $i$ -й

коэффициент  $n$ -го полинома в  $l$ -м базисном сплайне по отрезку  $[0,1]$  (т.е. построенном по набору начальных данных

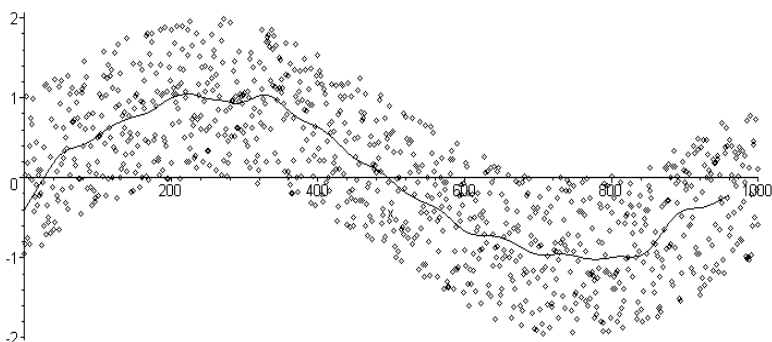
$$\{y_j = \delta_{jl}, j = 0, \dots, K_2\}). c_k = \int_0^{2\pi} D_k(r) dr = \sum_{n=0}^{L_1-1} \sum_{i=0}^3 \frac{a_i^{n,k}}{i+1} H_1^{i+1}, H_1 = \frac{2\pi}{L_1}$$
 а

$a_i^{n,k}$  -  $i$ -й коэффициент  $n$ -го полинома в  $k$ -м базисном сплайне по отрезку  $[0, 2\pi]$  (т.е. построенном по набору начальных данных  $\{y_j = \delta_{jk}, j = 0, \dots, K_1\}$ ). Квадратуры для двумерных

интегралов

| $\sin r P_6(\varphi)$ |                         |             | $2r \sin^2 \varphi$ |                        |             |
|-----------------------|-------------------------|-------------|---------------------|------------------------|-------------|
| L - число полиномов   | Точность                | $\approx k$ | L - число полиномов | точность               | $\approx k$ |
| 12                    | $9.15 \times 10^{-8}$   |             | 12                  | $3.11 \times 10^{-7}$  |             |
| 2*12=24               | $2.82 \times 10^{-9}$   | 32.45       | 2*12=24             | $3.66 \times 10^{-8}$  | 8.49        |
| 2*24=48               | $8.711 \times 10^{-11}$ | 32.34       | 2*24=48             | $2.8 \times 10^{-9}$   | 12.8        |
| 2*48=96               | $2.71 \times 10^{-12}$  | 32.19       | 2*48=96             | $1.96 \times 10^{-10}$ | 14.56       |
| 2*96=192              | $8.615 \times 10^{-14}$ | 31.41       | 2*96=192            | $1.27 \times 10^{-11}$ | 15.3        |

**3.6. Пример сглаживания исходной информации.** Здесь  $M=80, m=40$ .



**Список литературы:**

1. Силаев Д.А., Кортаев Д.А. S-сплайн на круге. Тезисы конференции "Математика. Компьютер. Образование", Пущино, Январь 2003 г. с.157.
2. Силаев Д.А., Якушина Г.И. Приближение S-сплайнами гладких функций. В кн.: Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып.10. М.: Изд-во МГУ, 1984, с.197-206.
3. Амилющенко А.В., Лукьянов А.И., Силаев Д.А. Применение сплайна для приближения гладких периодических функций. Вестник Московского университета. №6, 1996 г. Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященные 175 летию Чебышева. Т.1, с.22-25.

## **S-SPLINE APPLICATION**

**Silaev D. A., Korotaev D. O.**

(Russia, Moscow)

*This paper considers application of special S-splines. These spline's construction is based on condition of 1<sup>st</sup> derivative's smoothness and on the method of least squares. Distinction of these splines is their semi-locality (i.e. every polynomial knows all the preceding function's values and doesn't know the following ones). Basic S-splines are constructed using these splines that give us an ability to consider any function as linear combination of basic splines. Basic splines are applied for function approximation, solving of differential equations (using method of Galerkin) and for getting a quadrature formulas. S-spline on circle is constructed in the same way that allows us to solve the same tasks for circle and for more complex areas.*