ДИФРАКЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ПЛАНАРНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ НА ПЛАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ

Горобец А. П., Половинкин А. Н., Равин А. Р.

(Россия, Москва)

В работе предложена методика решения задач дифракции на плавных цилиндрически-симметричных неоднородностях в планарных диэлектрических волноводах. Предложенным методом аналитически строго решена задача для неоднородности, приближенно представленной 3-х ступенчатой моделью.

Ключевыми функциональными элементами многих интегрально-оптических устройств являются фокусирующие системы (волноводные линзы), с помощью которых формируется необходимый фазовый фронт оптических пучков, осуществляется фурье-преобразование и многое другое. Разрешающая способность планарных линз ограничивается одномерными аналогами сферической аберрации и аберрации комы [1].

Волноводной линзой принципиально позволяющей избавиться от геометрических аберраций является тонкоплёночный аналог линзы Люнеберга, представляющий собой цилиндрически-симметричное плавное утолщение волноводного слоя.

При проектировании интегрально-оптических устройств необходимо решить задачу расчёта дифракционной картины на фокальной линии планарной линзы по заданному распределению толщины волновода $h(r)$.

Рассмотрим участок неоднородного планарного диэлектрического волновода с цилиндрически-симметричным утолщением $h(r)$. Будем считать изменение толщины плавным в том случае, если $grad(h(r)) << kh$ [4]. При этом условии, в некоторой окрестности каждой точки области неоднородности, волновод приближённо можно считать плоским и ввести эффективный показатель преломления $n_{эф}(r)$, рассчитываемый из дисперсионного уравнения плоского волновода по заданному распределению толщины $h(r)$. Плавность изменения толщины приводит к адиабатическому характеру распространения волноводной моды, при котором она претерпевает пространственные деформации без обмена энергией с другими модами (как направляемыми, так и излучаемыми). Направляемая волноводная мода внутри плёнки может быть представлена в виде суперпозиции двух плоских волн распространяющихся под углом φ к направлению распространения моды, связанным с эффективным показателем преломления $\cos\varphi = \frac{n_{эф}}{n_f}$, где n_f – показатель преломления волноводной плёнки [2]. В этих условиях можно перейти от решения задачи дифракции волноводной моды на цилиндрически-симметричном утолщении $h(r)$ к решению задачи дифракции плоских волн на бесконечном диэлектрическом цилиндре с показателем преломления $n(r) = n_{эф}(r)$, распространяющихся под углом φ, отсчитываемом от нормали к его поверхности. То есть к решению двумерной задачи дифракции в плоскости XOY, предполагая, что вдоль координаты Z распределение поля полностью описывается структурой соответствующей волноводной моды. При этом в качестве модели, удобной для расчётов, можно использовать ступенчатую аппроксимацию непрерывного распределения показателя преломления $n(r)$. Поэтому на первом этапе рассмотрим задачу о дифракции плоской волны на однородном цилиндре при наклонном падении. Геометрия задачи представлена на рис. 1.

Бесконечный круговой цилиндр радиуса R с показателем преломления n_1 расположен в среде с показателем преломления n_0 и ориентирован по оси Z. Падающая волна E^0 H^0 распространяется под углом φ к оси X в плоскости XOY.

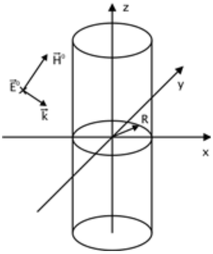

Рис. 1

В силу симметрии будем решать задачу в плоскости XOY, тогда поле падающей волны в декартовых координатах может быть записано в виде (1), (2) для перпендикулярной (Н-волны) и параллельной (Е-волны) поляризаций соответственно, где $\beta_0 = kn_0 \cos\varphi$, $w_0 = 1/n_0$. В ходе решения задачи предстоит найти выражения для полей дифракции внутри и снаружи цилиндра. Полное поле во внешней области представляется в виде суммы падающего поля и внешнего поля дифракции.

$$\begin{cases} E_y^0 = A\exp(-i\beta_0 x) \\ H_z^0 = \dfrac{A}{w_0}\cos\varphi\exp(-i\beta_0 x) \\ H_x^0 = \dfrac{A}{w_0}\sin\varphi\exp(-i\beta_0 x) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} H_y^0 = \dfrac{-A}{w_0}\exp(-i\beta_0 x) \\ E_z^0 = A\cos\varphi\exp(-i\beta_0 x) \\ E_x^0 = A\sin\varphi\exp(-i\beta_0 x) \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим случай дифракции на цилиндре Н-волны. Поле падающей волны в цилиндрических координатах будет иметь вид [3]:

$$\begin{aligned} \vec{E}_h^0 &= A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n[\vec{r}_0 \frac{n}{\beta_0 r} J_n(\beta_0 r) + \vec{\alpha}_0 i J_n'(\beta_0 r)]\exp(in\alpha) \\ \vec{H}_h^0 &= \frac{A}{w_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n[\vec{r}_0 i\sin\varphi J_n'(\beta_0 r) - \\ &\quad -\vec{\alpha}_0 \frac{n}{\beta_0 r}\sin\varphi J_n(\beta_0 r) + \vec{z}_0\cos\varphi J_n(\beta_0 r)]\exp(in\alpha) \end{aligned} \tag{3}$$

Внутреннее поле дифракции представим при помощи подобных рядов, но с неизвестными коэффициентами b_n, $\overline{b}_n$. При записи полей дифракции также необходимо учитывать изменение поляризации, появляющееся вследствие наклонного падения. Итак, внутреннее поле дифракции запишется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}_h^+ = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n b_n[\vec{r}_0\frac{n}{\beta_1 r}J_n(\beta_1 r)+\vec{\alpha}_0 iJ_n'(\beta_1 r)]\exp(in\alpha)\\
&\vec{H}_h^+ = \frac{A}{w_1}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n b_n[\vec{r}_0 i\sin\varphi J_n'(\beta_1 r)-\vec{\alpha}_0\frac{n}{\beta_1 r}\sin\varphi J_n(\beta_1 r)+\\
&+\vec{z}_0\cos\varphi J_n(\beta_1 r)]\exp(in\alpha)\\
&\vec{E}_e^+ = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n \overline{b}_n[\vec{r}_0 i\sin\varphi J_n'(\beta_1 r)-\vec{\alpha}_0\frac{n}{\beta_1 r}\sin\varphi J_n(\beta_1 r)+\\
&+\vec{z}_0\cos\varphi J_n(\beta_1 r)]\exp(in\alpha)\\
&\vec{H}_e^+ = \frac{-A}{w_1}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n b_n[\vec{r}_0\frac{n}{\beta_1 r}J_n(\beta_1 r)+\vec{\alpha}_0 iJ_n'(\beta_1 r)]\exp(in\alpha)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

8. Аналогичным образом выражается внешнее поле дифракции (с неизвестными коэффициентами c_n, $\overline{c}_n$), однако теперь, в соответствии с принципом излучения, в разложении необходимо использовать функции Ханкеля второго рода.

$$
\begin{aligned}
&\vec{E}_h^- = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n c_n[\vec{r}_0\frac{n}{\beta_0 r}H_n^{(2)}(\beta_0 r)+\vec{\alpha}_0 iH_n^{(2)\prime}(\beta_0 r)]\exp(in\alpha)\\
&\vec{H}_h^- = \frac{A}{w_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n c_n[\vec{r}_0 i\sin\varphi H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r)-\vec{\alpha}_0\frac{n}{\beta_0 r}\sin\varphi H_n^{(2)}(\beta_0 r)+\\
&+\vec{z}_0\cos\varphi H_n^{(2)}(\beta_0 r)]\exp(in\alpha)\\
&\vec{E}_e^- = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n \overline{c}_n[\vec{r}_0 i\sin\varphi H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r)-\vec{\alpha}_0\frac{n}{\beta_0 r}\sin\varphi H_n^{(2)}(\beta_0 r)+\\
&+\vec{z}_0\cos\varphi H_n^{(2)}(\beta_0 r)]\exp(in\alpha)\\
&\vec{H}_e^- = \frac{-A}{w_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n \overline{c}_n[\vec{r}_0\frac{n}{\beta_0 r}H_n^{(2)}(\beta_0 r)+\vec{\alpha}_0 iH_n^{(2)\prime}(\beta_0 r)]\exp(in\alpha)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Требование равенства тангенциальных компонент полей на границе цилиндра $r = R$ приводит к системе четырёх линейных уравнений для коэффициентов b_n, $\overline{b}_n$, c_n, $\overline{c}_n$:

$$\begin{cases} iH_n^{(2)\prime}(\beta_0 R)c_n - \dfrac{n}{\beta_0 R}\sin\varphi H_n^{(2)}(\beta_0 R)\overline{c}-_n \\ \qquad -iJ_n'(\beta_1 R)b_n + \dfrac{n}{\beta_1 R}\sin\varphi J_n(\beta_1 R)\overline{b}_n = \\ \qquad\qquad = -iJ_n'(\beta_0 R) \\ -\dfrac{n}{\beta_0 R}\dfrac{\sin\varphi}{w_0}H_n^{(2)}(\beta_0 R)c_n - i\dfrac{1}{w_0}H_n^{(2)\prime}(\beta_0 R)\overline{c}_n + \\ \qquad +\dfrac{n}{\beta_1 R}\dfrac{\sin\varphi}{w_1}J_n(\beta_1 R)b_n + i\dfrac{1}{w_1}J_n'(\beta_1 R)\overline{b}_n = \\ \qquad\qquad = \dfrac{n}{\beta_0 R}\dfrac{\sin\varphi}{w_0}J_n(\beta_0 R) \\ H_n^{(2)}(\beta_0 R)\overline{c}_n - J_n(\beta_1 R)\overline{b}_n = 0 \\ \dfrac{1}{w_0}H_n^{(2)}(\beta_0 R)c_n - \dfrac{1}{w_1}J_n(\beta_1 R)b_n = -\dfrac{1}{w_0}J_n(\beta_0 R) \end{cases} \tag{6}$$

При $\varphi = 0$ система (6) даёт следующие выражения для коэффициентов b_n, $\overline{b}_n$, c_n, $\overline{c}_n$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{J_n(\beta_0 R)H_n^{(2)\prime}(\beta_0 R) - J_n'(\beta_0 R)H_n^{(2)}(\beta_0 R)}{J_n(\beta_1 R)H_n^{(2)\prime}(\beta_0 R) - \dfrac{w_1}{w_0}J_n'(\beta_1 R)H_n^{(2)}(\beta_0 R)} \\ c_n &= \frac{-J_n(\beta_1 R)J_n'(\beta_0 R) + \dfrac{w_1}{w_0}J_n'(\beta_1 R)J_n(\beta_0 R)}{J_n(\beta_1 R)H_n^{(2)\prime}(\beta_0 R) - \dfrac{w_1}{w_0}J_n'(\beta_1 R)H_n^{(2)}(\beta_0 R)} \\ \overline{b}_n &= 0, \quad \overline{c}_n = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, при нормальном падении плоской волны на цилиндр, во внутреннем и внешнем полях дифракции отсутствуют компоненты с другой поляризацией. Сами же поля дифракции выражаются рядами (4) и (5) при подстановке в них коэффициентов (7) и $\varphi = 0$.

Численный анализ решений системы (6) показал, поле второй поляризации является нечётной функцией угла падения φ, поэтому в поле дифракции суммы двух плоских волн, падающих под углами φ и $-\varphi$ (что имеет место в волноводе) поле второй поляризации отсутствует. В реальных волноводах угол φ, как правило, не превышает 50^0. Было проведено сравнение распределения внешних полей дифракции исходной поляризации рассчитанных по решениям точной системы (6), с распределениями полей, рассчитанными по формулам для нормального падения (7) с подстановкой в них $\beta_j = kn_j \cos\varphi$ при параметрах системы близких к предельным: $R/\lambda = 10$, $n_0 = 1.5$, $n_1 = 2$, $\varphi = 50^0$. Результаты вычислительного эксперимента показали, что ошибка при расчётах внутреннего и внешнего полей дифракции по формулам для нормального падения и указанных выше параметрах системы не превышает 5%. Эти расхождения значительно убывают при увеличении R/λ, уменьшении $\Delta n = n_1 - n_0$ и, естественно, при уменьшении угла падения φ, что соответствует реальной ситуации. Поэтому в дальнейшем при решении задачи дифракции на неоднородном цилиндре будем считать, что падающая плоская волна распространяется по нормали к его поверхности.

Рассмотрим дифракцию Н-волны на неоднородной структуре, представляющей собой систему вложенных цилиндрических слоёв с разными показателями преломления. (Это ступенчатая модель реального распределения $n_{эф}(r)$ в линзе Люнеберга.) В пределах одного слоя показатель преломления будем считать постоянным (рис.2). Поле падающей волны при этом запишется в виде:

$$\vec{E}_h^0 = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(-i)^n[\vec{r}_0 \frac{n}{\beta_0 r} J_n(\beta_0 r) + \vec{\alpha}_0 i J_n'(\beta_0 r)]\exp(in\alpha) \qquad (8)$$

$$\vec{H}_h^0 = \frac{A}{w_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\vec{z}_0(-i)^n J_n(\beta_0 r)\exp(in\alpha)$$

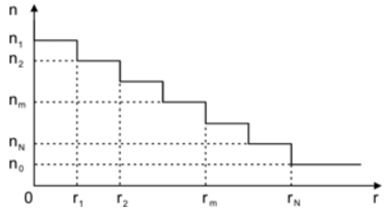

Рис. 2

Внешнее поле дифракции примет вид:

$$\vec{E}_h^- = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n c_n [\vec{r}_0 \frac{n}{\beta_0 r} H_n^{(2)}(\beta_0 r) + \vec{\alpha}_0 i H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r)]\exp(in\alpha) \qquad (9)$$

$$\vec{H}_h^- = \frac{A}{w_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \vec{z}_0 (-i)^n c_n \cos\varphi H_n^{(2)}(\beta_0 r)\exp(in\alpha)$$

Поле в произвольном кольце $r_{m-1} < r < r_m$ также представим в виде рядов, в которых в общем случае используются функции Бесселя первого и второго рода:

$$\vec{E}_h^0 = A\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-i)^n [\vec{r}_0 \frac{n}{\beta_0 r}(a_n^m J_n(\beta_0 r) + b_n^m N_n(\beta_0 r)) + \vec{\alpha}_0 i (a_n^m J_n'(\beta_0 r) + \qquad (10)$$

$$+ b_n^m N_n'(\beta_0 r)]\exp(in\alpha)$$

$$\vec{H}_h^0 = \frac{A}{w_0}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \vec{z}_0 (-i)^n (a_n J_n^m(\beta_0 r) + b_n^m N_n(\beta_0 r)\exp(in\alpha)$$

При этом, чтобы в нуле внутреннее поле дифракции не имело особенности, необходимо потребовать равенства нулю коэффициентов b_n^1.

Потребуем непрерывности на границе раздела $r = r_m$ тангенциальных компонент поля: $H_z^m = H_z^{m+1}$ и $E_\alpha^m = E_\alpha^{m+1}$. Это приведёт нас к системе двух линейных уравнений относительно коэффициентов a_n^m, b_n^m:

$$A_m \begin{pmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{pmatrix} = \tilde{B}_m \begin{pmatrix} a_n^{m+1} \\ b_n^{m+1} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где матрицы A_m и $\tilde{B}_m$ имеют вид:

$$A_m = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{w_m} J_n(\beta_m r_m) & \dfrac{1}{w_m} N_n(\beta_m r_m) \\ J'_n(\beta_m r_m) & N'_n(\beta_m r_m) \end{pmatrix};$$

$$\tilde{B}_m = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{w_{m+1}} J_n(\beta_{m+1} r_m) & \dfrac{1}{w_{m+1}} N_n(\beta_{m+1} r_m) \\ J'_n(\beta_{m+1} r_m) & N'_n(\beta_{m+1} r_m) \end{pmatrix}$$

Решение системы (11), запишется в виде $\begin{pmatrix} a_n^{m+1} \\ b_n^{m+1} \end{pmatrix} = \tilde{B}_m^{-1} A_m \begin{pmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{pmatrix}$. Обозначим через B_m матрицу, обратную к $\tilde{B}_m$, и вычислим её. В силу того, что определитель матрицы $\tilde{B}_m$ равен $\dfrac{2}{\pi k r_m}$, матрица B_m существует и равна:

$$B_m = \frac{\pi k r_m}{2} \begin{pmatrix} N'_n(\beta_{m+1} r_m) & \dfrac{-1}{w_{m+1}} N_n(\beta_{m+1} r_m) \\ -J'_n(\beta_{m+1} r_m) & \dfrac{1}{w_{m+1}} J_n(\beta_{m+1} r_m) \end{pmatrix}$$

При последовательном сшивании полей для коэффициентов a_n^N, b_n^N получаем следующее матричное выражение:

$$\begin{pmatrix} a_n^N \\ b_n^N \end{pmatrix} = B_{N-1} A_{N-1} \cdot \ldots \cdot B_2 A_2 B_1 A_1 \begin{pmatrix} a_n^1 \\ b_n^1 \end{pmatrix} = \left(\prod_{s=1}^{N-1} B_s A_s \right) \begin{pmatrix} a_n^1 \\ b_n^1 \end{pmatrix}$$

Обозначим через D следующую матрицу:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = A_N \cdot \prod_{s=1}^{N-1} B_s A_s ,$$

тогда граничные условия на последней границе $r = r_N$, с учётом равенства нулю коэффициентов b_n^1, приведут нас к системе двух линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения внешнего поля дифракции c_n и внутреннего поля дифракции в первой области ($r < r_1$) a_n^1 :

$$-d_{11}a_n^1 + \frac{1}{w_0}c_n H_n^{(2)}(\beta_0 r_N) = -\frac{1}{w_0}J_n(\beta_0 r_N) \tag{12}$$

$$-d_{21}a_n^1 + c_n H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r_N) = -J_n'(\beta_0 r_N)$$

Решение системы (12) методом Крамера даёт следующие выражения искомых коэффициентов:

$$a_n^1 = \frac{\frac{1}{w_0}[J_n'(\beta_0 r_N)H_n^{(2)}(\beta_0 r_N) - J_n(\beta_0 r_N)H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r_N)]}{\frac{1}{w_0}d_{21}H_n^{(2)}(\beta_0 r_N) - d_{11}H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r_N)} \tag{13}$$

$$c_n = \frac{d_{11}J_n'(\beta_0 r_N) - \frac{1}{w_0}d_{21}J_n(\beta_0 r_N)}{\frac{1}{w_0}d_{21}H_n^{(2)}(\beta_0 r_N) - d_{11}H_n^{(2)\prime}(\beta_0 r_N)} \tag{14}$$

Коэффициенты разложения внутреннего поля дифракции в произвольном слое r_m могут быть вычислены по формуле:

$$\begin{pmatrix} a_n^m \\ b_n^m \end{pmatrix} = \left(\prod_{s=1}^{m-1} B_s A_s\right)\begin{pmatrix} a_n^1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Таким образом были определены все параметры для расчета полей дифракции как внутри неоднородности, так и в окружающем пространстве, т.е. полностью решена задача дифракции на протяженном неоднородном объекте.

В качестве примера было рассчитано внешнее поле дифракции для структуры, состоящая из трёх ступеней с радиусами 3λ, 7λ и 10λ и показателями преломления 2.0, 1.8 и 1.6 соответственно. На рисунках 3 и 4 представлены рассчитанные распределения интенсивности электромагнитного поля вдоль направления распространения Ox при $y = 0$ (рис. 3) и в области фокуса $x = 44.5$ перпендикулярно направлению распространения (рис. 4). Интенсивность падающей волны была принята равной 1.

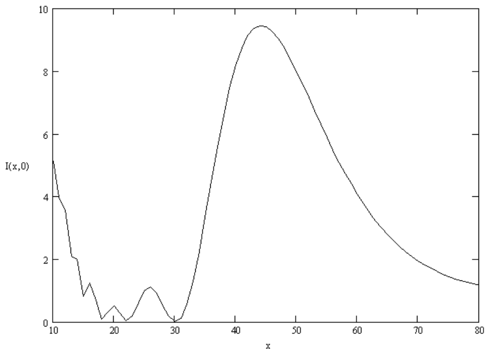

Рис. 3

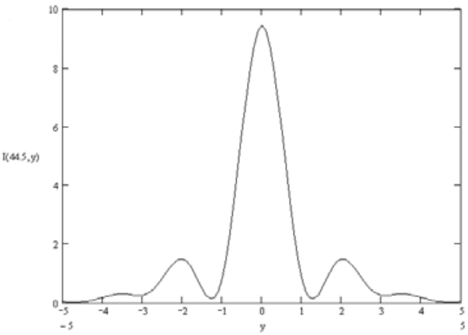

Рис. 4

Таким образом, в настоящей работе предложена методика решения задач дифракции на плавных цилиндрически-симметричных неоднородностях в планарных диэлектрических волноводах.

Предложенным методом аналитически строго решена задача для неоднородности, приближенно представленной 3-х ступенчатой моделью. Решение получено в виде рядов (9), (10), коэффициенты которых вычисляются по формулам (13), (14), (15). Решён также ряд модельных задач, показавший возможности данной методики расчёта полей дифракции.

Список литературы:

1. Аникин В. И., Дерюгин Л. Н., Летов Д. А., Половинкин А. Н., Сотин В. Е. ЖТФ, 48,5, 1005-1009 (1978)
2. Дерюгин Л. Н., Марчук А. Н., Сотин В. Е. Известия Вузов, Радиоэлектроника,10, 2, 134 (1967)
3. Никольский В. В., Никольская Т. И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука. (1989)
4. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир. (1974)

DIFFRACTION OF EIGEN MODES OF PLANAR OPTICAL WAVEGUIDES ON SMOOTH CYLINDRICAL INHOMOGENEITIES

Gorobets A. P., Polovinkin A. N., Ravin A. R.

(Russia, Moscow)

A solving method for diffraction problems on smooth axial-symmetric inhomogeneities in a planar waveguide is considered. A strict solution for an inhomogeneity approximated by 3-graded model is demonstrated.