КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ*

Коганов А. В.

(Россия, Москва)

Задача интегральной геометрии заключается в восстановлении функции по ее интегралам на заданной системе подмножеств области определения. Рассматривается также обобщение, связанное с восстановлением функции по значению на ней системы линейных функционалов. В обоих случаях осуществляется редукция задачи к последовательности задач конечной размерности. Получены новые формулы обращения.

1. Введение

Традиционные методы интегральной геометрии решают задачу восстановления функции на области конечномерного действительного пространства по значению ее интегралов на всех k-плоскостях, пересекающих эту область. При этом используется аппарат классического функционального анализа [1, 2].

Проведенные автором исследования показали, что имеются естественные постановки задачи восстановления функции по ее интегралам на последовательности конечных измеримых покрытий области, у которых порожденные разбиения монотонно стремятся к поточечному разбиению. Классическую постановку можно рассматривать как частный случай, соответствующий такой последовательности покрытий, в которой интеграл по любой K-плоскости можно получить как предел специальных усреднений функции по некоторым элементам этих покрытий. Задачу можно решать на любом пространстве с мерой для суммируемых на всем пространстве функций. От функции требуется, чтобы ее усреднения по элементам порожденных разбиений,

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

инцидентных одной точке, сходились (с ростом номера покрытия) к значению функции в этой точке. Найдено конструктивное необходимое и достаточное условие разрешимости обратной задачи восстановления функции.

Другим обобщением классической постановки является задача восстановления функции из L_2 по значению на ней некоторого базового множества обобщенных функций. Задача приводится к финитной форме, если базовое множество счетно. Для этой постановки найдено конструктивное достаточное условие разрешимости обратной задачи. По традиции результирующую формулу, вычисляющую значение искомой функции в произвольной точке, будем называть *формулой обращения*.

2. Восстановление функции по ее интегралам на элементах покрытий

Рассмотрим две возможности решения задачи, указанной в заголовке. Они различаются требованиями к системам покрытий и факторами, влияющими на устойчивость восстановления.

2.1. Асимптотическое обращение по системе покрытий

2.1.1. **Постановка задачи**. Рассматривается пространство T с мерой μ на некоторой сигма-алгебре ψ. На T задана последовательность покрытий (P_n, $n = 1,\ldots$). Множества, входящие в состав каждого покрытия, μ-измеримы. Обозначим D_n разбиение, порожденное покрытием P_n, а $D_n(x)$ и $P_n(x)$ — элементы соответствующих систем подмножеств, содержащие $x \in T$. По определению $D_n(x) = \cap\{v | v \in P_n(x)\}$. На покрытия накладываются следующие требования.

a1. При каждом n и для любого $x \in T$ имеется подсистема подмножеств $P'_n(x) \subset P_n(x)$ такая, что для любых двух различных $v, w \in P'_n(x)$, $v \neq w$, выполняется $v \cap w = D_n(x)$.

a2. Для всех $n = 1,\ldots$ и $x \in T$ $k_n(x) = \#P'_n(x) < \infty$, и при этом $k_n(x) \uparrow \infty$, $n \to \infty$.

a3. Обозначим $m_n(x) = k_n(x)\mu(D_n(x))$. Тогда $m_n(x) \uparrow \infty$, $n \to \infty$.

Предположим, что на T задана некоторая функция $f: T \to \mathbf{R}$, о которой известно следующее:

b1. Функция измерима по сигма-алгебре ψ и абсолютно суммируема по мере μ:

$\int_{x\in T} |f(x)|d\mu(x) = I < \infty$.

b2. Заданы интегралы по всем подмножествам $v \in P_n$, $n = 1,\ldots$: $J\_(v) = \int_v f(x)d\mu(x)$.

b3. Для каждого $x\in T$ $\lim_{n\to\infty}(\int_{Dn(x)} f(x')d\mu(x')/\mu D_n(x)) = f(x)$.
Требуется восстановить функцию f во всех точках $x\in T$.

2.1.2. **Формула асимптотического обращения**

Теорема 1. В условиях a1 – a3, b1 – b3 имеет место равенство:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [\Sigma\ J\_\{v\} \mid v\in P'_n(x)]/m_n(x). \qquad (2.1.1)$$

Доказательство. По условию a1

$$u(n,x) = [\Sigma J_v \mid v\in P'_n(x)]/m_n(x) =$$
$$= [\Sigma[\Sigma J_q \mid q\subset v \& q\in D_n] \mid v\in P_n(x)]/m_n(x) =$$
$$= J_{Dn(x)} /\mu D_n(x) + A(n,x)/m_n(x)$$

где $|A(n,x)| < I$ по условию b1. Поэтому, из условий a3, b3 следует (2.1.1).■

2.1.3. **Пример покрытия**, удовлетворяющего условиям асимптотического обращения. Рассмотрим в качестве пространства (T,μ) полуинтервал [0;1) на действительной прямой с мерой Лебега. Разбиение D_n состоит из интервалов и полуинтервалов двух видов: $D_n = D_n(A)\cup D_n(B)$;

$D_n(A)=\{[\ i/n\ ;\ (i+1)/n\ ) \mid\ i=0\_\_(n-1)\}$;

$D_n(B)=\{[(n-1)/n + i/(n2^n)\ ;\ (n-1)/n + (i+1)/(n2^n)\ ) \mid i=0\_\_(n2^n -1)\ \}$.

Покрытие P_n состоит из множеств вида $a\cup b$, $a\in D_n(A)$, $b\in D_n(B)$.$

Число элементов покрытия P_n, содержащих данный элемент $a\in D_n(A)$ равно $k_n(x)=\#\ D_n(B)=2^n$.

Мера такого элемента равна $\mu(a)=1/n$. Поэтому для любого $x\in T$ при достаточно большом n $m_n(x)=n2^n \to\infty$, $n\to\infty$.

Любые два элемента такого подпокрытия пересекаются только по элементу разбиения a.

Выполнены все условия на последовательность покрытий. Пример легко обобщается на куб без границы любой конечной размерности.

2.2. **Полные системы покрытий**.

В этом разделе будет развит другой подход к решению задачи восстановления функции по ее интегралам на подмножествах -

элементах покрытия пространства. Он основан на построении системы уравнений, связывающей эти интегралы с интегралами по элементам разбиения, порожденного данным покрытием. Если эта система однозначно разрешима, то функцию можно оценить.

2.2.1. **Определение полного покрытия** Сохраним обозначения из раздела 2.1 для последовательности измеримых покрытий P_n и для порожденных ими разбиений D_n на пространстве T с мерой μ, а также для подпокрытий $P_n(x)$ и элементов разбиения $D_n(x)$,содержащих данную току $x\in T$. При каждом n эти покрытия (а значит и разбиения) предполагаются конечными. Будем предполагать также некоторую стандартную нумерацию их элементов.

Матрицей инцидентности покрытия P_n назовем набор индексов принадлежности элементов порожденного разбиения элементам покрытия:

$$E_n=(e_n(v,w)|v\in P_n,w\in D_n)$$

$$e_n(v,w)=1 \ \{\text{если } w\subset v\}\Big|\ 0 \ \{\text{ иначе}\} \qquad (2.2.1)$$

Порядок строк (v) и столбцов (w) в матрице инцидентности определен стандартной нумерацией элементов покрытия и разбиения соответственно.

Покрытие назовем *полным*, если ранг его матрицы инцидентности равен мощности порожденного разбиения:

$$\mathrm{rnk}\ E_n=\#D_n. \qquad (2.2.2)$$

Последовательность конечных покрытий $\{P_n\big|\ n=1,...\}$ назовем *достаточной*, если все ее члены полные, и в стандартной упорядоченности разбиений последовательность D_n монотонно возрастает до поточечного разбиения ε пространства T:

$$\sup\ \{D_n\big|\ n=1,...\}=\varepsilon \qquad (2.2.3)$$

Замечание. Число элементов порожденного разбиения равно числу столбцов матрицы инцидентности. Следовательно, требование полноты покрытия соответствует максимальности ранга матрицы инцидентности.

Функция $f{:}T\to\mathbf{R}$ называется *разрешимой* относительно заданной достаточной последовательности покрытий на T, если она интегрируема на каждом элементе порожденных разбиений и удовлетворяет условию b3 раздела 2.1.1.

2.2.2. Задача восстановления функции Допустим, на пространстве задана достаточная последовательность покрытий P. Предположим, что имеется некоторая разрешимая функция, у которой известны все интегралы по элементам покрытий из P, т. е. заданы интегралы по всем подмножествам $v \in P_n$, n=1,... (условие a2 п 2.1.1). Требуется восстановить исходную функцию на T.

Заметим, что поставленная задача с точки зрения информации о функции близка к задаче раздела 2.1.1, но отличается отсутствием требования b1 абсолютной суммируемости функции. Это связано с изменением условий, наложенных на последовательность покрытий. Формулы обращения в этой постановке принципиально иные.

В силу конечности любого покрытия P для любого $v \in P_n$ можно записать разложение:

$$J_v = \Sigma_{w \in Dn,\, w \subset v} J_w = \Sigma_{w \in Dn}\, e_n(v,w) J_w \qquad (2.2.4)$$

Обозначим J^P вектор значений J_v, $v \in P_n$, и J^D вектор значений J_w, $w \in D_n$. Тогда можно переписать равенство (2.2.4) в форме

$$E_n J^D = J^P \qquad (2.2.5)$$

Поскольку правая часть уравнения (2.2.5) и матрица инцидентности в левой части известны, то эта формула является системой линейных уравнений. По условию полноты покрытия P_n система (2.2.5) имеет единственное решение

$$J^D = E^+_n J^P \qquad (2.2.6)$$

где E^+_n — матрица, квазиобратная к прямоугольной матрице E_n. Квазиобращение сводится к обращению минора максимального ранга в исходной матрице инцидентности с отбрасыванием остальных столбцов матрицы.

Теорема 2 Для разрешимой функции на достаточной последовательности покрытий верна формула обращения:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (E^+_n J^P)_{Dn(x)} / m_n(x). \qquad (2.2.7)$$

Доказательство следует из (2.2.6) и условия b3.■

2.2.3. **Пример достаточной последовательности покрытий** (лестничные покрытия). Каждое покрытие в последовательности будет состоять из множеств, полученных как объединение клеток из заданной прямоугольной сети на кубе в действительном пространстве конечной размерности. Члены последовательности различаются шагом сети, который монотонно стремится к нулю. Элементы покрытия являются лестничным приближением по данной сети к всевозможным прямым, проходящим через куб. Из такого покрытия будет конструктивно выделено подпокрытие с невырожденной матрицей инцидентности. Дадим формальное описание.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ куб $B=[-1;1)^n$. Клеточное разбиение D_k на B ранга $k\in\mathbf{N}$ строим в форме

$$D_k=\{\, x+[0;1/k)^n \mid x\in\{i/k \mid i=-k\_\_k-1\}^n\}, \qquad (2.2.8)$$

где общая граница соседних клеток принадлежит той клетке, у которой *векторный сдвиг* x лексикографически меньше. Элементы этого разбиения обозначим v(k,x) и назовем клетками ранга k. Обозначим сдвиг $x=(x_1,...,x_n)$, где каждая компонента принимает значения из $\{i/k \mid i=-k\_\_k-1\}$. Назовем линией сдвигов ранга k вектор-функцию x(t) параметра $t\in\mathbf{R}$:

$$x_i(t)=(1/k)\lfloor a_i t+b_i\rfloor \qquad (2.2.9)$$

для некоторых заданных a_i, $b_i\in\mathbf{R}$, $i=1,...,n$. Скобки $\lfloor u\rfloor$ обозначают нижнее целочисленное приближение действительного числа u. Назовем лестницей ранга k, соответствующей линии сдвигов $l:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$, $x(t)=l(t)$, множество

$$V_{k,l}=\cup_{t\in R}\, v(k,x(t))\cap B, \qquad (2.2.10)$$

Множество всех линий сдвига (2.2.9) обозначим L_k. Лестничное покрытие строим в форме

$$P_k=\{V_{k,l} \mid l\in L_k\} \qquad (2.2.11)$$

Если одна лестница $V_{k,l}$ соответствует различным линиям сдвига, то она рассматривается как один элемент покрытия, имеющий несколько обозначений. Если линия сдвигов не попадает в множество сдвигов из куба B, то ей не соответствует элемент покрытия (соответствующая лестница пуста).

Лемма 2.2.1. Лестничное покрытие для размерности 2 полное.

Доказательство. В двухмерном случае куб B является квадратом $[-1;1]\times[-1;1]$ в координатных осях X,Y. Сдвиг каждой клетки в разбиении D_k определяется двумя числами (y,x) вида m/k, m=-k,...,k-1. Будем называть строкой совокупность клеток с фиксированной координатой x векторного сдвига. Тогда имеется 2k строк по 2k клеток в каждой. Клетки нумеруются натуральными числами в порядке лексикографического роста векторного сдвига (y,x). Клетка с векторным сдвигом (Y/k;X/k), $Y,X\in\{-k,\dots,k-1\}$ имеет номер

$$N(y,x)=2k+Y+X+1. \qquad (2.2.12)$$

Обозначим d(N) клетку с номером N, а ее параметры сдвига Y(N),X(N).

Из лестничного покрытия P_k выберем подпокрытие $P'_k=\{V_N|N=1\_\_k^2\}$, где

$$N=N(y,x) \text{ и } V_N=\cup\{d(i)|i=N\_\_N+k\}. \qquad (2.2.13)$$

Такая лестница V_N соответствует линии сдвигов, пересекающей одну или две строки, и переходящей с одной строки на другую по клеткам N,N+k. По построению наименьший номер клетки, входящей в лестницу V_N, равен N. Поэтому соответствующий квадратный минор матрицы инцидентности $P'_k\times D_k$ порядка $k^2=\#D_k$ имеет единичную диагональ и нули под главной диагональю, что означает его невырожденность.■

Этот результат обобщается на произвольную конечную размерность. Обозначим B_n куб $[-1;1]^n$ в $\mathbf{R}^n$. Клеточное разбиение и лестничное покрытие ранга k на B_n обозначим, соответственно, $D_k(n)$ и $P_k(n)$. Тогда можно записать тождества

$$B_{n+1}=B_n\times[-1;1];\ D_k(n+1)=D_k(n)\times D_k(1). \qquad (2.2.14)$$

Теорема 3. При любой размерности пространства n для любого ранга k лестничное покрытие $P_k(n)$ на B_n является полным и содержит полное подпокрытие $P'_k(n)$, которое порождает клеточное разбиение $D_k(n)$ и имеет треугольную матрицу инцидентности с единичной диагональю.

Доказательство проводится по индукции. Выше показано, что $P_k(2)$ содержит полное подпокрытие $P'_k(2)$ с указанными свойствами. Предположим, утверждение теоремы верно для размерности n. Рассмотрим лестничное покрытие $P_k(n+1)$ на B_{n+1}. По тождеству (2.2.14) можно записать для B_{n+1} расслоение ранга k:

$$B_{n+1}=B_{n,k}\times[0;1/k]\times\{1;...;k\}=B_{n,k,1}\cup...\cup B_{n,k,k} \qquad (2.2.15)$$

где $B_{n,k,i}=B_n\times[(i-1)/k;\ i/k)$, i=1,…,k.

Все слои $B_{n,k,i}$ конгруэнтны $B_{n,k,1}$.Объединение слоев сингулярное. По предположению на каждом слое $B_{n,k,i}$ можно задать покрытие $P_{n,k,i}=P'_k(n)\times[(i-1)/k;\ i/k)$, $i=1,\ldots,k$, где декартово произведение относится к каждому элементу покрытия. Матрица инцидентности этого покрытия такая же, как у покрытия $P'_k(n)$. Эти покрытия являются подпокрытиями лестничного покрытия $P_k(n)$. Определим $P'=P'_k(n+1)=\cup_{i=1,\ldots,k} P_{n,k,i}$.

Это подпокрытие лестничного покрытия $P_k(n+1)$. Лестницы на разных слоях не пересекаются. Поэтому матрица инцидентности E' покрытия P' распадается на диагональные блоки, соответствующие разным слоям. Но на каждом слое матрица треугольная с единичной главной диагональю. Значит этим свойством обладает и вся E'. Поскольку на каждом слое $B_{n,k,i}$ покрытие P' порождает клеточное разбиение, которое совпадает с $D_k(n+1)$ на $B_{n,k,i}$, то на всем B_{n+1} покрытие P' порождает разбиение $D_k(n+1)$. Индукция завершена.■

2.2.4. **Оценка погрешности восстановления функции**. Формулы обращения (2.1.1) и (2.2.7) на конечном шаге n предельного перехода дают приближенное значение $f_n(x)$ с погрешность., которая в каждой точке $x\in T$ зависит от вариации функции на элементе разбиения $D_n(x)$. Для подмножества $V\subset T$ определим вариацию:

$$\mathrm{var}(f|V)=\sup\{f(x)\,|x\in V\}-\inf\{f(x)\,|x\in V\}. \qquad (2.2.16)$$

Тогда для формулы обращения (2.2.7)

$$|\,f(x)-f_n(x)|\le \mathrm{var}(f|D_n(x)), \qquad (2.2.17)$$

а для формулы обращения (2.1.1)

$$|\,f(x)-f_n(x)|\le \mathrm{var}(f|D_n(x))+I/m_n(x). \qquad (2.2.18)$$

Из этих оценок видно, что условие b3 выполняется, если для всех $x\in T$

$$\mathrm{var}(f|D_n(x))\to 0 \text{ при } n\to\infty\ . \qquad (2.2.19)$$

В частности, для клеточных разбиений п. 2.2.3 достаточно непрерывности функции на кубе.

3. Восстановление функции по значениям линейных операторов

Интегралы функций по подмножествам области определения являются частными случаями линейных операторов на линейном пространстве функций с заданной областью определения (*обобщенных функций* в принятой терминологии). Линейные операторы общего вида иногда лучше описывают наличную информацию о функции. Ниже будут исследованы условия, обеспечивающие восстановление функции по значению на ней заданного множества линейных операторов.

Лемма 3.1. Любой линейный функционал P на L_2 представим пределом скалярных произведений своего аргумента $f \in L_2$ с фиксированной последоватльностью элементов пространства $g_1, \dots$.

Доказательство. Пусть $\Psi_1, \dots$ — некоторый ортонормальный базис в L_2. Тогда

$$f = \Sigma_{i=1,\dots} b_i \Psi_i \; ; \qquad (3.1)$$

где $b_i = (f, \Psi_i)$. Из линейности P следует $P(f) = \Sigma_{\, i=1,\dots} b_i P(\Psi_i)$, т.е. $P(f) = \lim_{n\to\infty}(f, g_n)$, где $g_n = \Sigma_{i=1\dots n} P(\Psi_i)\Psi_i$. ■

3.1. Достаточная система функционалов

Рассмотрим пространство функций $L = L_2(T, \mu)$. На нем зададим множестваo Q линейных функционалов общего вида содержащее объединение последовательности конечных подмножеств линейных функционалов:

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots$$

$$\#Q_k < \infty, \; k = 1, \dots \; . \qquad (3.2)$$

В соответствие с леммой 3.1 каждый функционал $q \in Q$ может быть представлен последовательностью элементов из L: для произвольной функции $f \in L$

$$q(f) = \lim_{i\to\infty}(f, g_{q,i}) \qquad (3.3)$$

$$g_{q,i} = \Sigma_{i=1\dots n} q(\Psi_i)\Psi_i \; .$$

Определим множество G_k опорных функкий уровня k в форме

$$G_k = \{g_{q,k} | q \in Q_k\} \qquad (3.4)$$

Допустим, что в L задан некоторый ортонормированный базис $\Psi = (\Psi_1, \dots)$, такой, что

$$G_k \subset L\{\Psi_1, \dots, \Psi_{n(k)}\} = L\{\Psi(k)\} \qquad (3.5)$$

для некоторой последовательности n(k), $\Psi(k) = \{\Psi_1; \dots; \Psi_{n(k)}\}$, $k = 1, \dots$. В дальнейшем будем считать, что элементы q и Ψ конечных множеств G_{k} и $\Psi(k)$, соответственно, пронумерованы в определенном порядке. Тогда можно записать разложение опорных функций по этому базису:

$$g_{q,k}=\Sigma_{j=1\ldots n(k)}C_{q,j}(k)\Psi_j \qquad (3.6)$$

где $C_{q,j}(k)=(g_{q,k},\Psi_j)$, или в матричной форме $C(k)=(C_{q,j}(k))$

$$G_k=C(k)\Psi(k) \qquad (3.7)$$

Тогда для любого элемента $f\in L$

$$(f,g_{q,k})=\Sigma_{j=1\ldots n(k)}\, C_{q,j}(k)\, (f,\Psi_j). \qquad (3.8)$$

Ниже, евклидову норму вектора $x\in\mathbf{R}^N$ будем обозначать $|x|_N=(x_1^2+\ldots+x_N^2)^{1/2}$, а норму $f\in L_2$ обозначим $|f|=(f,f)^{1/2}$.

Определение 3.1. Система Q линейных функционалов на пространстве L с базисом Ψ удовлетворяющая уравнениям (3.2)—(3.8) называется *достаточной* на подпространстве $L'\subset L$, если выполняются следующие условия:

C1. Для функции $f\in L'$ обозначим

$$|(f,g_{q,k})-q(f)|_{n(k)}=\varepsilon_f(k). \qquad (3.9)$$

Тогда $\lim_{k\to\infty}\varepsilon_f(k)=0$.

C2. Обозначим для $k=1,\ldots$

$$p_k=\inf\{|C(k)x\,|_{n(k)}/|x|_{n(k)}\ \big|\ x\in\mathbf{R}^{n(k)}\}. \qquad (3.10)$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_f(k)/p_k=0, \qquad (3.11)$$

C3. Если обозначить $L_k=L\{G_k\}$ (линейная оболочка уровня k), то

$$L'\subset\cup_{k=1,\ldots\infty} L_k \qquad (3.12)$$

3.2. Системный образ функции

Определение 3.2. Системным образом (С-образом) функции $f\in L$ назовем отображение $q\,|\!\!\to(f,q)$, $q\in Q$, которое сопоставляет функции множество соответствующих ей значений $q(f)$ линейных функционалов заданной системы.

Теорема 4. Если система линейных функционалов достаточна на подпространстве L', то любая функция $f\in L'$ однозначно определена своим С-образом, и имеется явная формула обращения.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений относительно (f_k,Ψ_j):

$$q(f)= \Sigma_{j=1\ldots n(k)}C_{q,j}(k)(f_k,\Psi_j) \qquad (3.13)$$

для всех $q\in Q_k$, задающую приближенное решение f_k на уровне k:

$f_k=\Sigma_{j=1\ldots n(k)}\, (f_k,\Psi_j)\Psi_j$. (3.14)

Точное решение удовлетворяет системе с неизвестными свободными членами:

$$(f,g_{q,k})= \Sigma_{j=1\ldots n(k)}C_{q,j}(k)(f,\Psi_j). \qquad (3.15)$$

По условию (3.9)

$$q(f)=(f,g_{q,k})+z_q, \quad |z|_{n(k)}=\varepsilon_f (k). \qquad (3.16)$$

По условию (3.10)

$$|(f,\Psi_j)-(f_k,\Psi_j)|_{n(k)} <\varepsilon_f(k)/p_k. \qquad (3.17)$$

Это означает, что

$$|f-f_k|<\varepsilon_f(k)/p_k +|\Sigma_{j=n(k)+1\ldots\infty} (f,\Psi_j)\Psi_j| \qquad (3.18)$$

Следовательно, по (3.11) $f(x)=\lim_{k\to\infty} f_k(x)$для каждого $x\in T$.

Обозначим вектора $Q_k(f)=(q(f)|\ q\in Q_k)$, $v_j(k)=(f_k,\Psi_j)$, $V(k)=(v_j(k)|\ j=1,\ldots, n(k)\ )$, $v_j=(f,\Psi_j)$.

Формулу обращения можно записать в следующей форме:

$$V(k)=C(k)^{-1}Q_k(f);$$
$$v_j=\lim_{k\to\infty} v_j(k);\ j=1,\ldots;$$
$$f(x)=\Sigma_{j=1\ldots\infty} v_j\Psi_j(x). \qquad (3.19)\blacksquare$$

Замечание 3.1. На каждом уровне k можно задавать свой базис $\Psi(k)$. При этом формула обращения не меняется. Но матрица C(k) и опорные функции $g_{q,k}$ формируются по базису своего уровня.

3.3. Связь комбинаторной и классической интегральной геометрии

Классическая задача интегральной геометрии — восстановить функцию на n-мерном кубе B по ее интегралам на всех прямых, пересекающих куб. Интеграл функции от n числовых переменных $f(x_1,\ldots x_n)$ на прямой $l\subset B$ можно определить в форме обобщенной функции (линейного оператора q[l]) вида:

$$q[l](f)=J_l=\int_{x\in l}f(x)dl(x)=\int_{x\in B}f(x)\delta_l(x)dx \qquad (3.20)$$

где $\delta_l(x)=\delta(r(x,l))$ — дельта-функция евклидова расстояния r(x,l)точки x до прямой l. Рассмотрим последовательность D_k клеточных разбиений на кубе из раздела 2.2 со стороной клетки $H_k=1/k$. Обозначим l[k] лестницу, соответствующую прямой l на лестничном покрытии ранга k. Тогда верна формула

$$J_l=\lim_{k\to\infty} s(l)(H_k)^{1-n}\cdot\int_{x\in l[k]}f(x)dx \qquad (3.21)$$

где коэффициент s(l) зависит от направления прямой. Если e — направляющий вектор l, то

$$s(l)=\min\{1/|e_i|\ \mid i=1\_n\} \qquad (3.22)$$

Это позволяет решать задачу восстановления функции по значениям J_l, применяя теорему 4 с использованием базиса, состоящего из ступенчатых функций (индикаторов) Ψ_w на элементах $w \in D_k$ на каждом уровне k. В классическом случае задача решается формулой Радона, предполагающей непрерывное интегрирование. При решении по (3.19) делается предельный переход по последовательности решений конечномерных систем линейных уравнений. Фактически, при этом явно делается предельный переход, скрытый в определении дельта-функции. Для обеспечения достаточности системы функционалов нужно ограничить класс функций, подлежащих восстановлению принадлежностью к $\mathbf{L_2}$ и $\mathbf{C_2}$ на B. Кроме того, приходится выбирать разные шаги сети по оси X ($H_k=1/k$) и по остальным осям Y_1, Y_2,… ($h_k=1/k^2$). Тогда $n(k)=k^{2n+1}$.

Множество функционалов Q_k состоит из тех g[l], у которых лестницы l[k] образуют покрытие куба, построенное в лемме 2.2.1 и теореме 3. При этом для каждой лестницы выберем одного представителя l[k]. Это обеспечит конечность Q_k.

$$g_{q[l],w}=\Sigma_{i=1\dots n}\, C_{l,w}(k)\Psi_w\ ,$$

$$C_{l,w}(k)=(g_{q[l],k},\Psi_w)=q[l](\Psi_w)=s(l,w)e(l(k),w) \qquad (3.23)$$

где s(l,w) — коэффициент, определяемый относительным расположением прямой l и клетки w. При $l \cap w \neq \varnothing$ выполнено $s(l,w)>0$. Для выбранного покрытия по построению

$$s(l,w) \geq H_k=1/k, \qquad (3.24)$$

поскольку это длина участка прямой внутри клетки при пересечении клетки по противолежащим граням

$$J_l=s(l)(H_k)^{1-n}\cdot\int_{x\in l[k]} f(x)dx +O(h_k), \qquad (3.25)$$

где последнее слагаемое учитывает погрешность оценки интеграла (3.21) на клетках, примыкающих к границе куба B. Из (3.25) и гладкости функции f следует выполнение условия C1 п.3.1:

$$\varepsilon_k=O(h_k)=O(1/k^2). \qquad (3.26)$$

Из (3.23) и из теоремы 3 следует, что матрица C(k) верхняя треугольная с неотрицательными элементами и положительной диагональю. Из (3.24) тогда следует оценка в обозначениях условия C2 п. 3.1:

$$p_{k\geq}H_k=1/k. \qquad (3.27)$$

Из (3.26)–(3.27) следует $\varepsilon_k/p_k \leq O(1/k)$, что влечет выполнение условия C2.

Условие C3 п. 3.1 выполняется, поскольку линейная оболочка ступенчатых функций охватывает все непрерывные функции на кубе с границей. Следовательно, по теореме 4 доказана достаточность построенной системы линейных функционалов на $\mathbf{L_2} \cap \mathbf{C_2}$ на B. ■

Список литературы:

1. И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикен, М. И. Граев. Избранные задачи интегральной геометрии. — М.: “Добросвет”, 2000. 208 с.
2. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я Виленкин. Обобщенные функции, т. 5, Интегральная геометрия и связанные проблемы теории представлений. — М.: “Физматгиз”, 1962.

COMBINATORIAL METHODS OF INTEGRATED GEOMETRY

Koganov A. V.

(Russia, Moscow)

The task of integrated geometry consists in restoration of function by its integrals on the given system of subsets in its definition domain. The task generalization, which connected to restoration of function by meanings of system linear operators on it, is considered also. In both cases the reduction of a task to a sequence of finite dimension tasks is carried out. The new formulas of the inversion are received.