

# **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОЧЕЧНЫХ «МУТАЦИЙ» В АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ L-СИСТЕМЫ НА ФОРМУ ФРАКТАЛА «САЛФЕТКА СЕРПИНСКОГО»**

**Кешелава А.В.**

(Пушино, Московской области)

В 1968 году Аристид Линденмаер использовал алгоритм Коха в качестве простой математической модели морфогенеза растений. Этот класс алгоритмов в настоящее время известен как L-системы (системы Линденмаера).

Алгоритм генерации L-систем состоит из нескольких правил, используемых циклически для построения соответствующей графической структуры. Любые изменения в наборе правил могут рассматриваться как «мутации».

Целью данной работы было изучение влияния «точечных» мутаций на структуру фрактала известного как «салфетка Серпинского». Для получения структур соответствующих L-систем была использована свободно распространяемая программа “MKokh”.

Полученные результаты поделили все изученные «точечные» мутации на две группы: основная часть мутаций оказывает существенное влияние на конечную структуру, однако некоторые мутации того же класса оказывают неожиданно радикальные изменения.

## **INFLUENCE OF THE “DOT MUTATIONS” IN THE L- SYSTEM GENERATION ALGORITHM ON THE “SIERPINSKY SERVIETTE” FRACTAL STRUCTURE**

**Keshelava A.V.**

(Pushchino, Moscow Region)

In 1968 Aristid Lindenmayer used Kokh algorithms as the simple mathematical model of a plant morphogenesis. Presently this kind of algorithms is known as L-systems (Lindenmyer’s systems).

L-systems generation algorithm consists of few rules that are used iterationally to create appropriate graphic structure. Any change in the given set of the rules may be considered as “mutation”.

The aim of the given work was the study of simple “dot” mutations on the structure of the fractal known as “Sierpinsky serviette”. The free distributed program “MKokh” was used for L-systems structure generation.

Results obtained divide all “dot mutations” observed into the two groups: most “mutations” provide for great influence of the structures obtained but some mutation of the same class provide for unexpected drastic changes.

Принимая L-системы в качестве простейшей модели биологического морфогенеза, исследовалось влияние наименьших изменений (точечных мутаций) на структуру L-системы. Результаты демонстрируют, что качественно равнозначные изменения параметров наименьшей структурной единицы приводят к принципиально различным и труднопрогнозируемым результатам.

### **L-системы**

В 1905 году математиком Хельгой фон Кох был предложен специфический алгоритм, основанный на циклическом применении нескольких выбранных правил для генерации математических структур. Основная особенность предложенного алгоритма состоит в том, что в нем кроме основного правила действия используется несколько дополнительных правил. Дополнительные правила на каждом шаге заданным образом изменяют основное правило. Поэтому такой алгоритм часто называют алгоритмом последовательно перезаписываемых правил.

В 1968 биолог Аристид Линденмаер использовал этот алгоритм для моделирования морфогенеза растений. С тех пор L-системы рассматриваются как упрощенные математические модели биологического морфогенеза.

Так как в основе L-систем лежит принцип самоподобия, их можно отнести к фракталам. Чаще всего графические представления простейших L-структур отличают симметрия и фрактальность.

### **Фигуры Серпинского.**

Фигуры польского математика Вацлава Серпинского известны с 1915 г., еще до введения Бенуа Мандельбротом понятия «фрактал» (середине 70-х гг.). Эти фигуры известны как «ковёр Серпинского» и «салфетка Серпинского» (в некоторых упоминаниях «решето Серпинского»).

Алгоритм построения ковра следующий:

1. за исходную фигуру берется квадрат;
2. квадрат делится на 9 равных квадратных частей (как для игры крестики-нолики);
3. центральный квадрат удаляется;
4. затем для всех оставшихся квадратов многократно повторяются процедуры деления на 9 частей и удаления образовавшегося центрального квадрата.

Образующаяся в результате фигура называется «ковёр Серпинского».

Салфетка (Рис.1) вырезается аналогично, но из правильного треугольника (каждый раз удаляется треугольник, очерченный средними линиями).

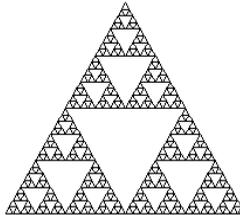


Рис. 1. Салфетка Серпинского

Необходимо подчеркнуть, что Серпинский придумал не сами фигуры, а алгоритм их построения, и обрабатывать данным способом возможно любые фигуры (и не только двумерные). Таким образом, даже если L-системы очень похожи на фигуры Серпинского (как в нашем случае), они не являются истинными фигурами Серпинского (хотя в пределе они и должны совпадать), т.к. построены по другим законам.

### Графическая реализация L-систем

L-системы строятся по принципу «черепашьей» графики, что можно себе представить следующим образом: черепашка пере-

двигается по листу бумаги согласно заданным правилам (вперёд, повернуться направо, повернуться налево, запомнить положение, вернуться в запомненное положение и т.д.). Проходя по листу, черепашка оставляет за собой след. В конце рассматривается получившаяся картина из следов.

Угол поворота и толщина линий задаётся заранее. На экране компьютера размер фигуры и шага масштабируется к исходно заданным ограничениям.

Исследование проводилось с использованием простой, свободно распространяемой программы Mkokh ([www.rechka.ru](http://www.rechka.ru)). Принятые в этой программе и используемые в данной работе обозначения таковы:

- команду вперёд обозначает буква «F»;
- повернуть направо – «+»;
- повернуть налево – «-».

Программа работает следующим образом:

- в строчке ***axiom*** записывается начальное движение черепашки.
- в строчке ***newF*** записывается подстановка.
- в строчке ***newX*** (в программе есть еще параметры ***newY*** и ***newB***, которые в данной работе не использовались) можно записать подстановки, которые можно вставить в ***axiom***, ***newF***, или в самих себя.

На первом шаге вырисовывается только ***axiom***. На втором шаге вместо каждой F из ***axiom*** подставляется значение из ***newF***, а вместо X, Y, B – соответственные значения ***newX***, ***newY***, ***newB***. Аналогично и на последующих этапах.

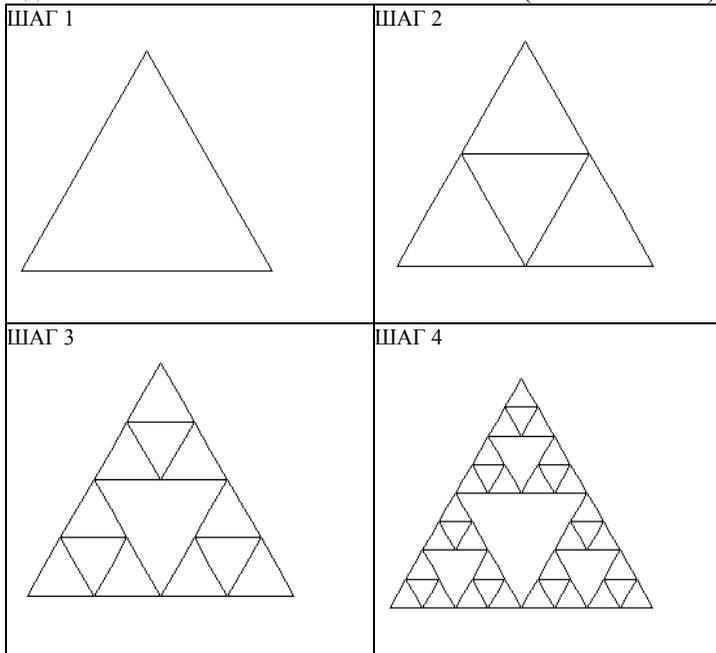
В формулах для построения «салфетки Серпинского» используются следующие значения ***axiom***, ***newF*** и ***newX***.

Axiom: FXF--FF--FF  
NewF: FF  
NewX: --FXF++FXF++FXF--  
Шагов: 5

Угол поворота (определяемый знаками «-» и «+»):  $\pi/3$

Таким образом, согласно алгоритму построения L-системы «салфетка Серпинского» за исходную фигуру берется равносостроенный треугольник (Axiom:FXF--FF--FF). Далее последо-

вательно производятся одинаковые шаги: на каждом шаге каждое  $F$  в формуле *axiom* заменяется на  $FF$  (значение *newX*), а каждое  $X$  заменяется на  $--FXF++FXF++FXF--$  (значение *newX*).



На первом шаге салфетка – это треугольник.

На втором – треугольник с проведёнными средними линиями.

На третьем – у каждого из крайних треугольников проведены средние линии.

И т.д.

На пятом шаге получается фигура, которая имеет узнаваемый вид, известный как «салфетка Серпинского» (Рис. 1).

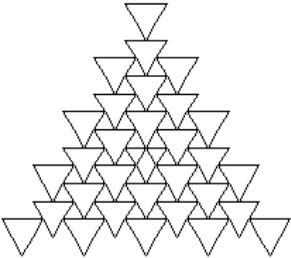
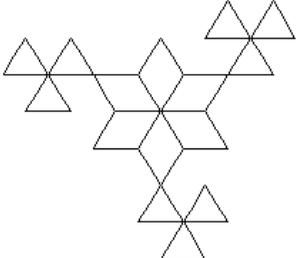
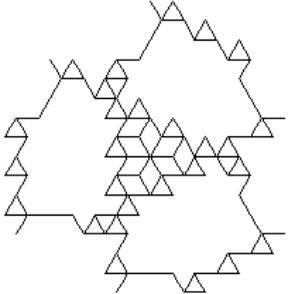
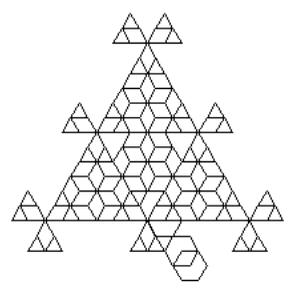
#### Точечные «мутации» в алгоритме построения L-системы

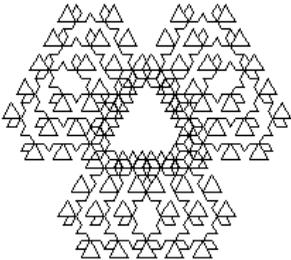
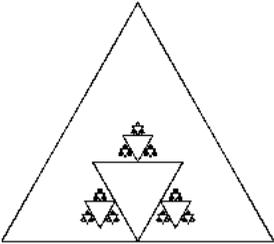
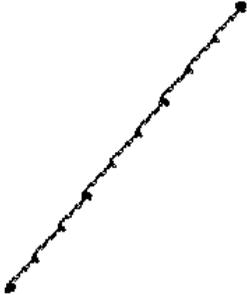
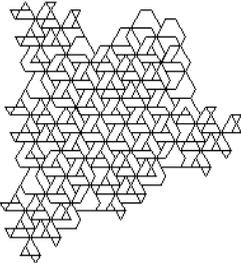
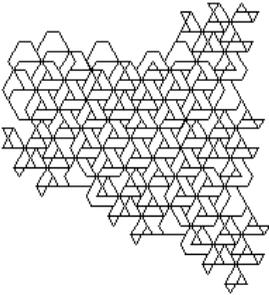
В формулах построения L-системы можно проводить любые изменения – так обычно и получают различные примечательные изображения. В выбранном случае «салфетки Серпинского» изменения вносились только в *newF*, т.к. это самый простой параметр формулы. Аналогичные исследования для многокомпонентных *axiom* и *newX* дали бы слишком много комбинаций.

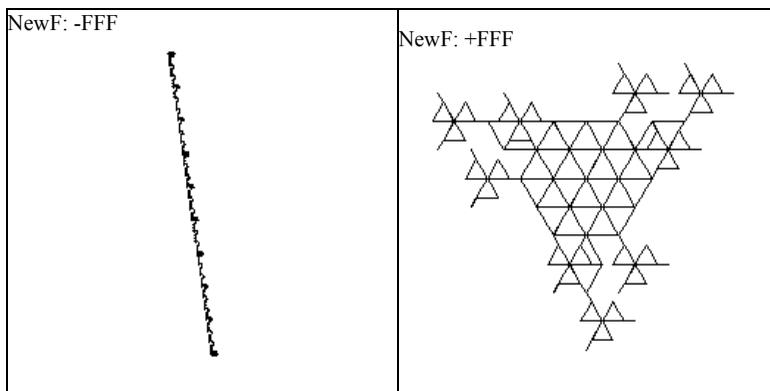
Наименьшей единицей построения L-систем является направленный отрезок. Т.е. «точечными мутациями» в данном рассмотрении можно называть удаление (делецию) или вставка (инсерцию) F со знаком или без него на базе исходной комбинации FF. А также точечное изменение одного из элементов в этой комбинации.

Всего получается 12 вариантов:

- четыре варианта с изменениями элементов: +FF, -FF, F+F, F-F;
- один вариант с удалением: F;
- семь вариантов со вставками: FFF, FF-F, FF+F, F+FF, F-FF, -FFF, +FFF.

NewF: F 	NewF: +FF 
NewF: -FF 	NewF: F+F 

<p>NewF: F-F</p> 	<p>NewF: FFF</p> 
<p>NewF: FF-F</p> 	<p>NewF: FF+F</p> 
<p>NewF: F+FF</p> 	<p>NewF: F-FF</p> 



### Выводы

Все полученные «мутации» приводят к значительным изменениям структуры, но, несмотря на это, в большинстве результирующих фигур удастся обнаружить «треугольность» и в общем виде, и в элементном. В то же время некоторые «мутации» приводят к радикальным и неожиданным изменениям, хотя «вес» каждого из изменений одинаков.

Автор благодарит своего преподавателя Вячеслава Львовича Калмыкова за введение в прекрасный мир математических моделей биологических объектов.