К ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА РОБАСТНЫХ СИСТЕМ

Кушакова С.Е., Оморов Т.Т.

(г. Кулебаки, г. Бишкек)

В данной работе предложен один из возможных подходов к синтезу робастных систем управления в условиях параметрической неопределенности и наличии неконтролируемых внешних возмущений в описании модели объекта. Процедура синтеза базируется на принципе гарантируемой динамики, что позволяет решить проблему не только устойчивости, но и требуемого качества управления.

TO THE TASK OF SYNTHESIS OF ROBUST SYSTEMS

Kushakova S.E., Omorov T.T.

(s.Kulebaki, s.Bishkek)

In the given work one of possible approaches to synthesis robust control systems is offered. In the description of model of object exist parametrical uncertainty and uncontrollable external disturbances. Procedure of synthesis is based on a principle of guaranteed dynamics. It allows to solve a problem not only steadiness of object, but also required quality of control.

В современной теории автоматического управления одним из ключевых направлений является синтез систем управления в условиях неопределенности. Это связано с разнообразными факторами, такими как неточное знание математической модели объекта, упрощение описания модели, понижение степени сложности либо пренебрежение существующими нелинейностями. Неопределенности так же могут возникать в результате старения элементов объекта при эксплуатации, при воздействии на объект внешних возмущений. Поэтому, возникает необходимость создания таких автоматических систем, которые при изменяющихся параметрах объекта и влиянии внешних возмущений оставались бы не только в устойчивом состоянии, но и обеспечивали требуемое качество функционирования. Исследование и синтез таких систем проводятся в рамках теории адаптивного и робастного управления. Идея робастного проектирования состоит в том, что необходимо подобрать такие установки управляющих параметров, чтобы влияние шумовых факторов на выходные характеристики было минимальным.

Для синтеза систем управления в условиях неопределенности разработано много методов [1,2]. Существуют алгебраические, частотные методы синтеза робастных систем. Некоторые задачи решаются как задачи синтеза алгоритмов, которые минимизируют квадратичный критерий [3]. В теории синтеза робастных систем все больше внимания уделяется качеству проектируемых систем. Вводится такое понятие как инжиниринг качества [4]. Согласно этому понятию выбирается критерий качества целевого функционирования, который подлежит оптимизации и далее процедура синтеза сводится к определению управляемых параметров для эксперимента, по результатам которого проводится анализ для выявления управляемых переменных, близких к оптимальным. Часто на практике, в качестве критерия, выбирают интегральные показатели качества, но они не всегда в полной мере могут учитывать реальные требования к проектируемой системе.

В данной работе рассматривается еще один возможный подход к синтезу робастных систем управления на основе принципа гарантируемой динамики [5]. В основу этого принципа положена концепция допустимости, использующая в качестве оценки первичные показатели качества переходных процессов автоматических систем управления. Концепция гарантируемой динамики определяет ряд функциональных соотношений, выполнение которых позволяет синтезировать автоматическую систему управления на основе первичных показателей качества системы, в частности, таких как быстродействие, динамическая и статическая точность. На основе этого принципа предлагается синтез робастных систем управления для объектов, имеющих параметрические неопределенности и при наличии неконтролируемых внешних возмущений в описании модели. Аналогичный подход был предложен в работе [6] для решения задачи параметрического синтеза робастной системы без учета внешних возмущений.

Постановка задачи. Рассмотрим классический вариант объекта управления в виде линейного стационарного векторного уравнения при наличии внешних возмущений

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + M\xi(t), \quad (1)$$

где A – вещественная матрица размерностью n×n; B – матрица размерностью n×m; M – матрица размерностью n×r; x(t) – n-мерный вектор состояния объекта; u (t) – m-мерный вектор управления; ξ (t) – r-мерный вектор внешних неконтролируемых возмущений, удовлетворяющих условиям

$$\left|\xi_\mu(t)\right| \le \xi_\mu^*, \quad \mu = \overline{1,r}, \quad (2)$$

где ξ_μ^* – известные положительные числа.

Предполагается, что в описании объекта существуют параметрические неопределенности, то есть матрицы $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$ объекта управления точно неизвестны:

$$A=A^*+\Delta A,\ B=B^*+\Delta B, \quad (3)$$

где $A^*=\{a_{ij}^*\}$, $B^*=\{b_{ij}^*\}$ – матрицы объекта, соответственно размерностью n×n и размерностью n×m, составленные из номинальных значений a_{ij}^* элементов A и номинальных значений b_{ij}^* элементов B; $\Delta A=\{\Delta a_{ij}\}$, $\Delta B=\{\Delta b_{ij}\}$- соответствующие матрицы неопределенностей, где интервалы неопределенностей известны

$$\left|\Delta a_{ij}\right| = \left|a_{ij} - a_{ij}^*\right| \le \Delta a_{ij}^+,$$

$$\left|\Delta b_{ij}\right| = \left|b_{ij} - b_{ij}^*\right| \le \Delta b_{ij}^+, \quad (4)$$

Δa_{ij}^+, Δb_{ij}^+– положительные числовые значения, определяющие границы изменения параметрических возмущений Δa_{ij}, Δb_{ij}.

С учетом (3) перепишем уравнение объекта в виде

$$\dot{x}(t) = A^*x(t) + B^*u(t) + \Delta Ax(t) + \Delta Bu(t) + M\xi(t). \quad (5)$$

Инженерные требования к синтезируемой системе представлены в виде вектора

Π_i = [Ti*, бi*, δi*],

где Ti*, бi*, δi* – максимально допустимые значения соответственно времени регулирования, перерегулирования и статической ошибки регулирования процессов $x_i(t)$. По критерию Π_i выбирают положительные функции $\sigma_i(t)$, с помощью которых задаются границы допустимых областей $X_i(t)$ (рис. 1). Требования, предъявляемые к качеству синтезируемой системы, определяются переходными процессами

$$\left|x_i(t)\right| \le \sigma_i(t), \quad t \in [t_0, t_k], \quad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

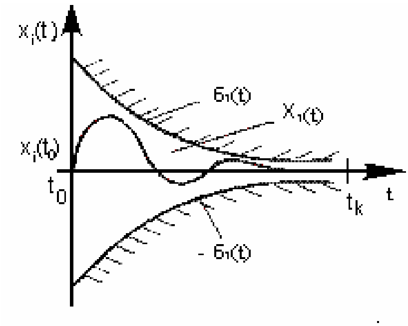

Рис. 1

Пусть объект (5) обладает свойством управляемости, а вектор состояния x(t) доступен для измерения. Закон управления для рассматриваемого объекта ищем в виде линейной обратной связи:

$$u(t) = K\,x(t), \tag{7}$$

где K – матрица размерностью m×n искомого регулятора:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots k_{2n} \\ & \cdots & \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots k_{mn} \end{bmatrix}$$

Из строк k_j матрицы K составим вектор $p = [k_1, k_2, ..., k_m]$, имеющий размерность $r=m\times n$.

Задача синтеза робастной системы управления для линейного объекта (5) формулируется в следующем виде:

Найти вектор-параметр p (элементы K) регулятора, обес-

печивающий выполнение целевых соотношений (6) при наличии параметрических неопределенностей (3) и влиянии внешних возмущений (2), т.е. определить область $p \in P$, где подмножество допустимых параметров

$P = \{p \in R^r: x_i \in X_i, \ i = \overline{1,n}\}$.

Решение задачи синтеза. Для синтеза системы управления с заданными показателями качества будем использовать следующую теорему, доказательство которой приведено в работе [5]

Теорема 1. Пусть $x(t_o) \in X(t_o)$. Тогда для того чтобы вектор состояния $x(t) \in X(t)$ достаточно, чтобы для каждого момента времени $t \in [t_o, t_k]$ выполнялись соотношения

$$\int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\dot{x}_i(\tau)d\tau \le \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Рассмотрим процедуру синтеза робастной системы с использованием принципа гарантируемой динамики. Для этого перепишем уравнение объекта (5) с учетом закона управления (7)

$$\dot{x}(t) = (A^* + B^*K)x(t) + (\Delta A + \Delta BK)x(t) + M\xi(t) . \tag{9}$$

В координатной форме оно будет иметь вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^* + \sum_{\nu=1}^{m} b_{i\nu}^* k_{\nu j})x_j + \sum_{\mu=1}^{n} m_{i\mu}\xi_\mu + \sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij} + \sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})x_j , \quad i = \overline{1,n} \tag{10}$$

Далее, с учетом соотношения (10), неравенства (8) примут вид

$$\int_{t_0}^{t}(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^* + \sum_{\nu=1}^{m} b_{i\nu}^* k_{\nu j})x_j(\tau) + \sum_{\mu=1}^{n} m_{i\mu}\xi_\mu + \sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij} + \sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})x_j(\tau))x_i(\tau)d\tau \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau , \ i = \overline{1,n} . \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}b_{i\nu}^{*}k_{\nu j})\int_{t_0}^{t}x_i(\tau)x_j(\tau)d\tau+\sum_{\mu=1}^{r}m_{i\mu}\int_{t_0}^{t}\xi_\mu(\tau)x_i(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})\int_{t_0}^{t}x_i(\tau)x_j(\tau)\le$$

$$\le\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau,\ i=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Для параметрического синтеза системы управления рассмотрим предельные случаи попадания процессов $x_i(t)$ на нижнюю и верхнюю границы соответствующих допустимых областей $X_i(t)$. При попадании $x_i(t)$ на верхнюю границу, т.е. при $x_i(t)=\sigma_i(t)$ условия (12) запишутся в виде

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r}m_{i\mu}\int_{t_0}^{t}\xi_\mu(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)\le\tilde{\Gamma}_i(t),$$

$$i=\overline{1,n}, \qquad (13)$$

где $\quad p_{ij}=a_{ij}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}b_{i\nu}^{*}k_{\nu j}$,

выделив диагональные элементы, получим

$$\tilde{\Gamma}_i(t)=\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau-p_{ii}\int_{t_0}^{t}\sigma_i^{2}(\tau)\,d\tau$$

При попадании на нижнюю границу при $x_i(t)=-\sigma_i(t)$ соответственно имеем

$$-\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau\right.$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r} m_{i\mu}\int_{t_0}^{t}\xi_\mu(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)\ \Big]\le\widetilde{\Gamma}_i(t),$$

$$i=\overline{1,n}, \tag{14}$$

(13) и (14) эквивалентны соотношению

$$\Bigg|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r} m_{i\mu}\int_{t_0}^{t}\xi_\mu(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)\Bigg|\le\widetilde{\Gamma}_i(t),$$

$$i=\overline{1,n}.$$

Исходя из (3) и (4) можем записать

$$\Bigg|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r} m_{i\mu}\int_{t_0}^{t}\xi_\mu(\tau)\sigma_i(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}(\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j})\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)\Bigg|\le$$

$$\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |p_{ij}|\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r} |m_{i\mu}\xi^*_\mu|\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}|(\Delta a^+_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b^+_{i\nu}k_{\nu j})|\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau),$$

$$i=\overline{1,n},$$

следовательно

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |p_{ij}|\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{\mu=1}^{r} |m_{i\mu}\xi^*_\mu|\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{n}|(\Delta a^+_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b^+_{i\nu}k_{\nu j})|\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)\le\widetilde{\Gamma}_i(t)$$

$$i=\overline{1,n}\,. \tag{15}$$

Определив параметрическую функцию

$$\mathrm{G}_i(\mathrm{p,t}) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\mathrm{p_{ij}}\right| \left|\int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) x_j(\tau) d\tau\right|, \qquad i=\overline{1,n}$$

перепишем (15) в виде

$$\mathrm{G}_i(\mathrm{p,t}) \le \widetilde{\Gamma}_i(t) - \sum_{\mu=1}^{r} \left|m_{i\mu}\xi_\mu^*\right| \left|\int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) d\tau\right| + {}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left|(\Delta a_{ij}^+ + \sum_{\nu=1}^{m} \Delta b_{i\nu}^+ k_{\nu j})\right| \left|\int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) x_j(\tau)\right|,$$

$$i=\overline{1,n} \tag{16}$$

Определив

$$\widetilde{\mathrm{G}}_i(\mathrm{p,t}) = \mathrm{G}_i(\mathrm{p,t}) - \widetilde{\Gamma}_i(t) + {}$$

$$+ (\sum_{\mu=1}^{r} \left|m_{i\mu}\xi_\mu^*\right| \left|\int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) d\tau\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|(\Delta a_{ij}^+ + \sum_{\nu=1}^{m} \Delta b_{i\nu}^+ k_{\nu j})\right| \left|\int_{t_0}^{t} \sigma_i(\tau) x_j(\tau)\right|)$$

$$i=\overline{1,n} \tag{17}$$

можем записать

$$\widetilde{\mathrm{G}}_i(\mathrm{p,t}) \le 0 \tag{18}$$

Таким образом, задача синтеза робастной системы управления сводится к определению области допустимых параметров регулятора

$$\widehat{P} = \{p \in R^{\widetilde{m}} : \widetilde{\mathrm{G}}_{\mathrm{i}}(p,t) \le 0, \quad \mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}\}.$$

Соотношения (18) гарантируют принадлежность переходных процессов к заданным допустимым множествам, что в свою очередь гарантирует не только устойчивость синтезированной робастной системы автоматического управления, но и выполнение инженерных требований к качеству системы.

Литература.

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. –М.:

Высш. шк. – 1989. –236 с
2. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. –М.: Наука, 1983. – 239 с.
3. Миркин Б.М., Лыченко Н.М. Робастное децентрализованное управление дискретными системами с нелинейным исполнительным механизмом // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек «Илим», 1997 с. 17-24.
4. Системы управления. Инжиниринг качества / под ред. А.Г. Варжапетяна. –М.: Вузовская книга, 2001. – 320 с.
5. Оморов Т.Т., Шаршеналиев Ж.Ш. Управление многомерными объектами на основе концепции допустимости. Бишкек «Илим», 1996. – 160 с.
6. Оморов Т.Т., Кушакова С.Е. Синтез робастных автоматических систем на основе концепции допустимости. // Вестник Кыргызского технического университета им. И.Раззакова. – Бишкек – 1999. С. 65-69.