ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Морозова В.А.

(Москва)

Приведены результаты численного исследования устойчивости по начальным данным явной разностной схемы для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями. Вычислены нормы степеней матриц перехода. Проверено выполнение критериев устойчивости в различных сеточных пространствах. Найдены числа обусловленности матриц, определяющих энергетические нормы.

ON STABILITY OF AN NONLOCAL DIFFERENCE SCHEME: NUMERICAL STUDY

Morozova V.A.

(Moscow)

The numerical investigation is represented concerning stability with respect to initial data of the explicit difference scheme for heat conduction equation with nonlocal boundary conditions. The norms of powers of transition matrices are calculated. Stability criterions are checked for various grid spaces. The conditions numbers are obtained for matrices which defines energy norms.

Введение. Будем рассматривать явные разностные схемы, записанные в каноническом виде (см. [1])

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0,1,\ldots, \quad \tau > 0, \quad y_0 \text{ задан,} \tag{1}$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — искомая функция дискретного аргумента $t_n = n\tau$ со значениями в конечномерном линейном пространстве H, и A - линейный оператор, действующий в H. В дальнейшем предполагаем, что τ и A не зависят от n. Пусть в H задано скалярное произведение $(\,,\,)$ и норма $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Если D – самосопряженный положительный в H оператор, то определены скалярное произведение $(y,v)_D = (Dy,v)$ и энергетическая норма $\|y\|_D = \sqrt{(Dy,y)}$. В дальнейшем E – единичный оператор и H_E – пространство с нормой $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Согласно [2] разностная схема (1) называется *устойчивой в пространстве* H_D, если $\|y_n\|_D$ является невозрастающей функцией n, то есть

$$\|y_{n+1}\|_D \le \|y_n\|_D, \quad n = 0,1,\ldots \tag{2}$$

при любых начальных данных $y_0 \in H$.

В настоящей работе изучается устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями. Введем сетку

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad hN = 1\}$$

и обозначим

$$y_i^n = y(x_i,t_n), \quad y_{\bar{x}x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}.$$

Рассмотрим разностную схему

$$\begin{gathered}\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = y_{\bar{x}x,i}^n, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad hN = 1, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad y_{x,0}^n - \beta y_{\bar{x},N}^n = \frac{\beta h}{2}\frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau},\end{gathered} \tag{3}$$

содержащую вещественный параметр β в граничных условиях.

Для приведения схемы (3) к каноническому виду (1) введем линейное пространство H как множество вещественных векторов $y = (y_1\ y_2 \cdots y_N)^T$ с покоординатным сложением и умножением на число. Схема (3) имеет канонический вид (1), где $y_n = \left(y_1^n\ y_2^n \cdots y_N^n\right)^T$ и оператор A определяется правилом

$$\begin{gathered}(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad y_0 = 0, \\ (Ay)_N = -\frac{2}{h}(\gamma y_{x,0} - y_{\bar{x},N}), \quad \gamma = \frac{1}{\beta}.\end{gathered} \tag{4}$$

В дальнейшем предполагаем, что $|\gamma| \le 1$. Необходимым условием устойчивости схемы (3) является выполнение неравенства $\tau \le 0{,}5h^2$.

Аналитическое исследование устойчивости схемы (3), проведенное в работе [3], оставляет невыясненными такие вопросы, как построение и исследование норм в различных пространствах H_D и проверка критериев устойчивости. В настоящей работе предпринята попытка получить ответы на эти вопросы с помощью численного эксперимента.

Симметрическая часть оператора A. Собственные значения и собственные векторы оператора (4) можно выписать в явном виде (см. [4]). При $|\gamma| \le 1$ все собственные значения неотрицательны и не превосходят $4/h^2$. Если $|\gamma|<1$, то все собственные значения различны, а система собственных векторов образует неортогональный базис в H. Случай $\gamma=1$ является особым, он изучался в работах [5], [6]. В этом случае все собственные значения, кроме $\lambda_0=0$, имеют алгебраическую кратность 2, а система собственных векторов не образует базиса, она может быть дополнена до базиса присоединенными векторами.

В таблице 1 приведены значения $\lambda_{\min}(A)$ минимального собственного числа матрицы A для $N=40$ и различных γ. В данном случае максимальное собственное значение слабо зависит от γ и равно примерно $4N^2=6400$.

Таблица 1. Зависимость минимального собственного значения оператора A от γ.

γ	0	0.1	0.5	0.7	0.99	1.
$\lambda_{\min}(A)$	2.47	2.16	1.10	0.63	0.02	0.
γ	-0.1	-0.5	-0.7	-0.99	-1.	
$\lambda_{\min}(A)$	2.79	4.39	5.50	9.00	9.87	

Введем в H скалярное произведение и норму так же, как и в [5], а именно

$$(y,v)=\sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0{,}5 y_N v_N h, \quad \|y\| = \sqrt{(y,y)}. \tag{5}$$

Тогда сопряженным к оператору (4) будет оператор A^*, определяемый правилом

$$(A^* v)_i = -v_{\bar{x}x,i}, \quad i = 2,3,\ldots,N-1,$$

$$(A^* v)_1 = \frac{1}{h^2}(2v_1 - v_2 - \gamma v_N), \quad (A^* v)_N = \frac{1}{h^2}(-2v_{N-1} + 2v_N).$$

Заметим, что матрица A^* не совпадает с матрицей A^T, транспонированной к A. Справедливо равенство $A^* = R^{-1} A^T R,$ где $R = \mathrm{diag}(h,h,\ldots,h,0.5h)$ – матрица, определяющая скалярное произведение (5).

Симметрическая часть оператора A определяется как $A_0 = 0{,}5(A^* + A)$. Для теории устойчивости разностных схем является существенным тот факт, что в определенных диапазонах изменения γ и N оператор A_0, построенный по оператору (4), имеет одно отрицательное собственное значение. В этих диапазонах разностная схема (3) неустойчива в пространстве H_E при любых $\tau > 0$. Ниже приведены вычисленные отрицательные собственные значения λ_0 оператора A_0 для различных γ и N. Прочерк означает отсутствие отрицательных собственных значений.

Таблица 2. Отрицательное собственное значение оператора A_0 при $N = 40$

γ	0	0.2	0.3	0.5	0.7	1.
$h^2\lambda_0$	–	–	-0.0003	-0.0040	-0.0124	-0.0410

Таблица 3. Отрицательное собственное значение оператора A_0 при $N = 100$

γ	0	0.2	0.3	0.5	0.7	1.
$h^2\lambda_0$	–	–	-0.0005	-0.0035	-0.0120	-0.0410

Более детальный анализ показывает, что отрицательное собственное значение имеется при условии

$$-1 \le \gamma \le \frac{2}{\sqrt{N}-1} \quad \text{или} \quad \frac{2}{\sqrt{N}+1} \le \gamma \le 1.$$

Непосредственная проверка устойчивости. Необходимым условием устойчивости схемы (3) является выполнение неравенства

$$\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}. \qquad (6)$$

В работе [5] доказано, что для схемы (3) с $\gamma = 1$ при условии $\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2(1+\varepsilon)}, \varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|y_n\| \le M_1 \|y_0\|, \qquad (7)$$

где константа M_1 зависит только от ε и $M_1 \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Оценка (7) означает устойчивость по начальным данным в сеточной L_2–норме.

Численная проверка устойчивости схемы (3) проводилась следующим образом. Задавалось начальное значение y_0 с компонентами $y_0(x_j) = (-1)^j$ и вычислялись векторы $y_n = S^n y_0$, где $S = E - \tau A$ – оператор перехода и n – номер временного слоя. Прослеживалась зависимость различных норм решения от n. В случае неустойчивости норма решения возрастает с ростом n. Рассматривались две нормы. Первая – это сеточная L_2–норма, определяемая согласно (5). Вторая – энергетическая норма $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$, где $D = (\mu\mu^*)^{-1}$ и μ – матрица, столбцами которой являются нормированные в смысле (5) собственные векторы матрицы A. Можно доказать, что при $|\gamma| \ne 1$ схема (3) устойчива в H_D при условии (6).

Ниже приведены значения $\|y_n\|$ и $\|y_n\|_D$ в зависимости от n для $N = 40$ и $\gamma = 0.7$. Шаг по времени выбирался равным $\tau = 0{,}5(1+\varepsilon)h^2$, где величина ε варьировалась. Случай $\varepsilon > 0$ отвечает неустойчивым схемам, а $\varepsilon < 0$ – устойчивым. Параметр $\varepsilon = 0$ соответствует границе устойчивости.

Таблица 4. Зависимость решения от номера слоя. $N = 40$, $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = 0$

n	0	30	200	500	1000
$\|y_n\|$	0.994	1.004	1.017	0.971	0.881
$\|y_n\|_D$	0.182	0.173	0.163	0.154	0.139

Таблица 5. Зависимость решения от номера слоя. $N = 40$, $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = -0.1$

n	0	30	200	500	1000
$\|y_n\|$	0.994	0.017	0.011	0.010	0.009
$\|y_n\|_D$	0.182	0.003	0.002	0.002	0.001

Таким образом, при критическом значении $\tau = 0{,}5h^2$ норма $\|y_n\|_D$ монотонно убывает с ростом n, а среднеквадратичная норма является ограниченной, но немонотонной функцией n. При $\varepsilon = 0.1$ условие устойчивости нарушено и нормы решения катастрофически возрастают уже на первых слоях. Так, при $n = 30$ имеем $\|y_n\| = 238$, $\|y_n\|_D = 41$.

Вычисление норм матриц S^n позволяет исследовать устойчивость вне зависимости от конкретных начальных условий. Ниже приведены значения L_2-нормы матрицы S^n.

Таблица 6. Нормы степеней матрицы перехода. $N = 40$, $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = 0$

n	0	1	30	200	500	1000
$\|S^n\|$	1	1.338	1.051	1.052	1.004	0.91

Таблица 7. Нормы степеней матрицы перехода. $N = 40$, $\gamma = 0.7$, $\varepsilon = -0.1$

n	0	1	30	200	500	1000
$\|S^n\|$	1	1.222	1.044	1.046	1.004	0.92

Отсюда видно, что при $\tau \le 0{,}5h^2$ схема (3) устойчива в L_2 (выполняется оценка (7)), но неустойчива в H_E.

Обусловленность оператора нормы. Если схема (1) устойчива в каком-либо пространстве H_D, то справедливо неравенство

$$\|y_n\|_D \le \|y_0\|_D,$$

из которого следует оценка (7), где константа M_1 равна корню квадратному из числа обусловленности матрицы D: $M_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(D)/\lambda_{\min}(D)}$.

Выше отмечалось, что в случае разностной схемы (3) с $|\gamma| \ne 1$

в качестве D можно взять оператор $D=(\mu\mu^*)^{-1}$, где μ – матрица, составленная из собственных векторов матрицы A. При таком выборе нормы условие (6) достаточно для устойчивости в H_D. В приведенных ниже таблицах прослеживается зависимость константы M_1 от параметра $\gamma=\beta^{-1}$ и от шага сетки h. Матрица оператора D вычислялась с учетом равенства $\mu^*=R^{-1}\mu^T R$, причем собственные векторы нормировались на единицу в норме (5).

Таблица 8. Зависимость M_1 от γ. $N=40$

γ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
M_1	1.41	1.50	1.61	1.76	1.94	2.18	2.49

γ	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99	0.999
M_1	2.95	3.70	5.36	7.67	1.94	54.79

Таблица 9. Зависимость M_1 от γ. $N=60$

γ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
M_1	1.50	1.61	1.76	1.94	2.18	2.49	2.95	3.70	5.36

Таблица 10. Зависимость M_1 от N. $\gamma=0.7$

N	3	10	20	30	40	50	100
M_1	2.32	2.97	2.95	2.95	2.95	2.95	2.95

Из приведенных таблиц можно сделать следующие выводы. Последовательность $M_1(N)$ имеет конечный предел при $N\to\infty$. Этот предел зависит от γ и становится бесконечным при $\gamma=1$. Число M_1 монотонно возрастает с ростом $|\gamma|$. При $\gamma=0.1$ имеем $M_1\approx1.5$. При $\gamma=0.9$ имеем $M_1\approx5.4$. Число точек N мало влияет на значения M_1.

З а м е ч а н и е. При $\gamma=0$ оператор A является самосопряженным в смысле скалярного произведения (5) и, следовательно, система векторов $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N$ является ортонормированной. Однако матрица μ не является ортогональной, $\mu^T\mu\neq E$. Выполняется равенство $\mu^T R\mu = E$, где $R = \mathrm{diag}(h, h, \ldots, h, 0.5h)$. Поэтому число обусловленности матрицы D равно 2 и $M_1(0) = \sqrt{2}$.

В заключение выражаю благодарность А. В. Гулину за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература.

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука. 1989, 3-е издание, 616 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука. 1973, 416 с.
3. Морозова В. А. Нелокальная разностная задача с параметром. Тезисы X Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование." Пущино, 2003.
4. А. В. Гулин, Морозова В. А. Имитация переменных коэффициентов в нелокальных разностных задачах. IY Всероссийский семинар «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Материалы Всероссийского семинара, Казань, 2002, с. 52-55.
5. Ионкин Н. И. Разностные схемы для одной неклассической задачи. Вестн. Моск. унив., сер. 15, выч. матем. и киб., 1977, N 2, с. 20-32.
6. Ионкин Н. И. Задача для уравнения теплопроводности с неклассическим (нелокальным) краевым условием. Будапешт, Numerikus Modzerek, N 14, 1979, 70 с.