ТЕОРЕМА О ВЕЛИЧИНЕ РАЗРЕЗА ДЕРЕВА НА ДВА РАВНЫХ КЛАСТЕРА ВЕРШИН

Акифьева К.С., Станкевич Е.В.

Россия, 150000, г. Ярославль, ул. Советская, д.14

Кластеризацией графов называют разбиение вершин графов на несколько непересекающихся множеств таким образом, чтобы такое разбиение соответствовало некоторому критерию. В данной работе рассмотрен частный случай задачи сбалансированного разрезания графа – разбиение дерева на две равные части с точностью до одной вершины. Для данной задачи в работе приведена формулировка и доказательство теоремы о величине такого сбалансированного разреза.

Теорема. Для любого дерева $T(V,E)$ существует сбалансированное разбиение $V = V_1V_2$ для которого значение выражения $\lfloor\frac{N)}{2}\rfloor$ является верхней оценкой величины его разреза, где N - число вершин дерева

Далее приведено доказательство теоремы. Заметим, что данная теорема справедлива для деревьев типа звезда. Если дерево не является звездой, то оно имеет рёбра $(v1, v2)$, такие что $\deg v1 > 1$ и $\deg v2 > 1$, назовём их внутренними рёбрами. Если удалить одно такое ребро, то в результате получим два дерева (т.к. не имеют циклов и связны). Повторим этот процесс рекурсивно. Если в графе имелось t внутренних рёбер, то в результате их рекурсивного удаления получим $t+1$ поддерево: $G_1, G_2, ...G_{t+1}$. Заметим, что в результате разбиения по внутреннему ребру может получиться только дерево степень которого не меньше 2, иначе выбранное ребро не является внутренним. Также отметим, что порядок полученных деревьев не превосходит $N-2t$. Упорядочим полученные деревья по убыванию их степеней. Далее строим множество вершин V_1 следующим образом: в V_1 заселяем вершины первых k деревьев из списка, так что

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{k-1} \deg G_t \leq \lfloor\frac{N}{2}\rfloor \\ \sum_{t=1}^{k} \deg G_t > \lfloor\frac{N}{2}\rfloor \end{cases}$$

Назовём G_k балансирующим деревом. Для получения сбалансированного разбиения в множество V_1 необходимо заселить часть вершин из балансирующего дерева (оставшиеся вершины заселяются в V_2), для этого необходимо совершить ещё C разрезов. Заметим, что т.к. $\deg G_k \leq N-2t$, то $C \leq \lfloor\frac{N-2t}{2}\rfloor$. Учитывая, что уже было произведено t разрезов, то получаем верхнюю оценку числа необходимых разрезов сбалансированного разбиения:

$$t + C \leq t + \lfloor\frac{N-2t}{2}\rfloor = \lfloor\frac{N}{2}\rfloor$$

В результате приведённой процедуры было получено равное с точностью до одной вершины (для случая нечётного количества вершин) разбиение вершин дерева с максимальной величиной разреза равной $\lfloor\frac{N}{2}\rfloor$. Теорема доказана.