О ГРАНИЦАХ СПЕКТРА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Зеленков Г. А., Зубов Н. В.

(Россия, Новосибирск, Москва)

В работе рассмотрены новые подходы для получения оценок границ спектров матриц линейных операторов с помощью спектров эрмитовых составляющих в их аддитивном представлении как в Евклидовом так и в унитарном пространствах. В первом случае удалось усилить результаты Бендиксона, а во втором – найти простое и короткое доказательство теорем Гирша (Хирша).

Введение. В 1902 г. Бендиксон [2] доказал оценку для спектра линейного оператора в евклидовом пространстве для реальных частей его чисел. Точнее, спектр вещественной матрицы такого оператора по реальным частям ограничен минимальным и максимальным значениями чисел спектра ее симметричной составляющей в известном аддитивном представлении. Однако, доказать подобную оценку для мнимых частей чисел спектра этой матрицы с помощью спектра кососимметрической составляющей в упомянутом представлении, оставаясь в классе вещественных матриц ему не удалось. Хотя, очевидно, умножив исходную матрицу на мнимую единицу, сразу получим вторую оценку, сведя к первой, что означает переход уже в класс комплексных матриц.

В 1903 г. Гирш (Хирш) [2] доказал обе оценки для комплексных матриц. До последнего времени эти неравенства были переоткрыты несколько раз. Однако, все известные автору доказательства являются достаточно сложными.

В представленной работе приведено доказательство первой и второй оценок для спектра вещественных матриц с помощью квадратичных форм, предложенного в [1] не выходя из этого класса, что делает результат Бендиксона законченным (теорема 1). Далее (теорема 2) доказан общий случай – обе оценки для спектра комплексных матриц линейного оператора. В отличие от всех известных нам доказательств оба подхода в теоремах 1-2 выгодно отличаются простотой и прозрачностью.

Основные понятия, определения и факты можно посмотреть в известных монографиях по теории матриц.

Методы. Доказательство неравенств в теореме 1 использует аддитивное представление вещественных матриц и подход, основанный на свойствах квадратичных форм и ортогональных преобразований в евклидовом пространстве.

В теореме 2 доказательство оценок спектров комплексных матриц использует эрмитово разложение и унитарные преобразования. Оба подхода позволили провести полные доказательства без ссылок на других авторов.

Результаты. Для постоянной вещественной квадратной матрицы порядка n рассмотрим ее аддитивное представление:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2} = \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{C} \qquad (1)$$

Известно, что квадратичная форма симметричной матрицы $\mathbf{B}$, с помощью ортогонального преобразования $\mathbf{Q}$ может быть приведена к диагональному виду:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}\mathbf{X} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i^2, \quad \|\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{Y}\|^2, \qquad (2)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$, $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}$,

$\|\mathbf{X}\|$ – евклидова норма вещественного вектора $\mathbf{X}$, а все μ_i - вещественные собственные числа матрицы $\mathbf{B}$ с учетом их кратностей.

С другой стороны, для любого вещественного вектора $\mathbf{X}$ и любой кососимметричной матрицы $\mathbf{C}$ имеем:

$$2\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}+\mathbf{C}^{\mathrm{T}})\mathbf{X} = 0 \ , \ \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X}. \tag{3}$$

Так как кососимметричная матрица $\mathbf{C}$ может иметь только чисто мнимые симметричные $j\nu_i$ и нулевые собственные числа, то матрица $\mathbf{C}^2$ является симметричной, а ее собственные числа имеют вид $-\nu_i^2$. Действительно, если $\mathbf{X}$ собственный вектор матрицы $\mathbf{C}$ для собственного числа $j\nu_i$, то

$$(\mathbf{C}^2)^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = (-\mathbf{C})(-\mathbf{C}) = \mathbf{C}^2 \ ,$$

$$\mathbf{C}\mathbf{X} = j\nu_i\mathbf{X}, \ \mathbf{C}^2\mathbf{X} = \mathbf{C}(j\nu_i\mathbf{X}) = -\nu_i^2\mathbf{X} \tag{4}$$

Таким образом, матрицу $\mathbf{C}^2$ можно с помощью ортогонального преобразования привести к диагональному виду:

$$\mathbf{C}^2 = \mathbf{Q}_1\mathbf{D}\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^2\mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{D} = \mathrm{diag}(-\nu_1^2,\ldots,-\nu_n^2).$$

Теорема 1. *Пусть величина* λ *является собственным числом вещественной матрицы* $\mathbf{A}$*, тогда справедливы неравенства:*

$$\min_{1\le i\le n}\mu_i \le \operatorname{Re}\lambda \le \max_{1\le i\le n}\mu_i, \tag{5}$$

$$-\max_{1\le i\le n}\nu_i \le \operatorname{Im}\lambda \le \max_{1\le i\le n}\nu_i, \tag{6}$$

где μ_i и $-\nu_i^2$ собственные числа матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}^2$ соответственно.

Доказательство. Пусть величина $a+jb$ является собственным числом матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{X}+j\mathbf{Y}$ – собственным вектором этой матрицы соответствующим этому собственному числу. Отделим в уравнении

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}+j\mathbf{Y}) = (a+jb)(\mathbf{X}+j\mathbf{Y}), \tag{7}$$

вещественные и мнимые части, получим систему уравнений:

$$\mathbf{AX} = a\mathbf{X} - b\mathbf{Y}, \quad \mathbf{AY} = b\mathbf{X} + a\mathbf{Y}\,. \tag{8}$$

Умножая уравнения (8) соответственно слева на $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}$, имеем:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{AX} = a\,\|\,\mathbf{X}\,\|^2 - b(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{AY} = a\,\|\,\mathbf{Y}\,\|^2 + b(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,.$$

Складывая эти равенства и, учитывая соотношения (2), (3) получим тождество:

$$\begin{gathered}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{AX} + \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{AY} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{BX} + \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{BY} = \\ = \mathbf{Z}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda Z}_1 + \mathbf{Z}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda Z}_2 = a(\|\,\mathbf{X}\,\|^2 + \|\,\mathbf{Y}\,\|^2)\end{gathered}, \tag{9}$$

где $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{QX}, \quad \mathbf{Z}_2 = \mathbf{QY}, \quad \|\,\mathbf{X}\,\|^2 = \|\,\mathbf{Z}_1\,\|^2, \quad \|\,\mathbf{Y}\,\|^2 = \|\,\mathbf{Z}_2\,\|^2$.
Перепишем (9) в скалярной форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (z_{1i}^2 + z_{2i}^2) = a\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) = a\sum_{i=1}^{n} (z_{1i}^2 + z_{2i}^2)\,.$$

Отсюда, очевидно, следует первое неравенство (5) теоремы.
Умножая уравнения (8) на матрицу $\mathbf{A}$ слева, получим:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{X} = (a^2 - b^2)\mathbf{X} - 2ab\mathbf{Y}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{Y} = (a^2 - b^2)\mathbf{Y} + 2ab\mathbf{X}\,. \tag{10}$$

Заметим, что матрица $\mathbf{BC} + \mathbf{CB}$ является кососимметричной матрицей.

Кроме того, собственные числа матриц $\mathbf{B}^2$ и $\mathbf{C}^2$ соответственно равны μ_i^2 и $-\nu_i^2$. Поэтому, умножая первое из уравнений (8) слева на $2a\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ а, первое из уравнений (10) слева на $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, получим равенства:

$$2a\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{AX} = 2a^2\mathbf{X}^2 - 2ab(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 2a\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{BX}\,, \tag{11}$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^2\mathbf{X} = (a^2 - b^2)\mathbf{X}^2 - 2ab(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2)\mathbf{X}\,. \tag{12}$$

После вычитания (11) из (12) следует:

$$-(a^2 + b^2)\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2)\mathbf{X} - 2a\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{BX}\,. \tag{13}$$

Перегруппируем (13) следующим образом:

$$-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^2\mathbf{X} - b^2\mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^2\mathbf{X} - 2a\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{X} + a^2\mathbf{X}^2 . \tag{14}$$

Используя соответствующие ортогональные преобразования $\mathbf{Q}_1$ для матриц $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^2$ и $\mathbf{Q}_2$ для матрицы $\mathbf{C}^2$, из (14) получим:

$$\begin{aligned} &-\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{Q}_2\mathbf{X} - b^2\mathbf{X}^2 = \\ &= \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{Q}_1\mathbf{X} - 2a\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}_1\mathbf{X} + a^2\mathbf{X}^2 \end{aligned} \tag{15}$$

После обозначения векторов $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{X}$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{Q}_2\mathbf{X}$ с учетом того, что $\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}_1\| = \|\mathbf{X}_2\|$ равенство (15) примет вид:

$$-\mathbf{X}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{X}_2 - b^2\mathbf{X}_2^2 = \mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{X}_1 - 2a\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}_1 + a^2\mathbf{X}_1^2 \tag{16}$$

Переписав (16) в скалярной форме, получим тождество.

$$\sum_{i=1}^{n}(\nu_i^2 - b^2)x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i - a)^2 x_{1i}^2 \tag{17}$$

Неотрицательность правой части (17) с учетом симметрии спектра матрицы $\mathbf{C}$ дает второе неравенство (6) теоремы.

Теорема доказана.

Теперь перейдем к оценкам спектров комплексных матриц.

Теорема 2. Для любого линейного оператора в унитарном пространстве с квадратной матрицей $\mathbf{A}$ его спектр по реальным и мнимым частям ограничен наибольшими и наименьшими значениями собственных чисел спектров его эрмитовых составляющих $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ в аддитивном представлении

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 + j\mathbf{H}_2 , \tag{18}$$

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^*}{2}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^*}{2j} . \tag{19}$$

Доказательство. Как известно, спектры эрмитовых матриц располагаются на вещественной оси комплексной плоскости. Пусть множество $\left\{\mu_i, i=\overline{1,n}\right\}$ является спектром матрицы $\mathbf{H}_1$, а множество $\left\{\nu_i, i=\overline{1,n}\right\}$ — спектр матрицы $\mathbf{H}_2$ (как обычно, кратность учитывается). Обозначим $a+jb$ — собственное число спектра матрицы $\mathbf{A}$. Докажем справедливость двух неравенств:

$$\min_{1\le i\le n}\mu_i \le a \le \max_{1\le i\le n}\mu_i, \tag{20}$$

$$\min_{1\le i\le n}\nu_i \le b \le \max_{1\le i\le n}\nu_i. \tag{21}$$

Геометрически, неравенства (20 – 21) определяют прямоугольник в комплексной плоскости с границами, параллельными вещественной и мнимой осям, а теорема утверждает, что спектр матрицы $\mathbf{A}$ локализован в этом прямоугольнике.

Пусть $\mathbf{X}$ — нормированный собственный вектор, соответствующий собственному числу $a+jb$. Тогда, по определению, выполняется

$$\mathbf{AX}=(a+jb)\mathbf{X},\ \ \mathbf{X}\ne 0, \tag{22}$$

Умножим равенство (22) слева на $\mathbf{X}^*$ ($\mathbf{X}^*=\bar{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}$), получим

$$\mathbf{X}^*\mathbf{AX}=\mathbf{X}^*(a+jb)\mathbf{X} \tag{23}$$

Из (23) и представления (18) следует, что

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{H}_1+j\mathbf{H}_2)\mathbf{X}=(a+jb)\|\mathbf{X}\|^2=a+jb \tag{24}$$

Так как $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — эрмитовы матрицы, то существуют унитарные матрицы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, что

$$\mathbf{H}_1=\mathbf{P}_1^*\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{P}_1,\ \ \mathbf{H}_2=\mathbf{P}_2^*\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{P}_2, \tag{25}$$

где $\mathbf{\Lambda}_1=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$, $\mathbf{\Lambda}_2=\mathrm{diag}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$.

Последнее означает, что эрмитовы матрицы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ унитарно подобны диагональным вещественным матрицам $\mathbf{\Lambda}_1$ и Λ_2 соответственно. Поэтому спектры матриц $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{\Lambda}_1$ совпадают и являются вещественными числами $\mu_i, i = \overline{1,n}$, а спектр косоэрмитовой матрицы $j\mathbf{H}_2$ состоит только из чисто мнимых чисел $j\nu_i, i = \overline{1,n}$. Из (24 – 25) получим:

$$\begin{aligned}&\mathbf{X}^*\mathbf{H}_1\mathbf{X} + j\mathbf{X}^*\mathbf{H}_2\mathbf{X} = \mathbf{X}^*\mathbf{P}_1^*\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{P}_1\mathbf{X} + j\mathbf{X}^*\mathbf{P}_2^*\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{P}_2\mathbf{X} = \\ &= \mathbf{Y}^*\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Y} + j\mathbf{Z}^*\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{Z},\end{aligned} \tag{26}$$

где $\mathbf{Y} = \mathbf{P}_1\mathbf{X},\ \mathbf{Z} = \mathbf{P}_2\mathbf{X}$.

Так как матрицы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ унитарные, то легко видеть, что

$$\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\| = \|\mathbf{Z}\| = 1. \tag{27}$$

Из (24 – 27) окончательно получим равенства:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i |y_i|^2 + j\sum_{i=1}^{n}\nu_i |z_i|^2 = (a + jb), \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i |y_i|^2 = a,\ \sum_{i=1}^{n}\nu_i |z_i|^2 = b. \tag{29}$$

Теперь нужные неравенства (20 – 21) прямо следуют из (29).
Теорема доказана.

Замечание. Улучшить неравенства (20), (21) в указанной постановке нельзя.

Следствие. Если квадратичная форма с вещественной матрицей $\mathbf{A}$ является отрицательно (положительно) определенной, то спектр матрицы $\mathbf{A}$ локализован в левой (правой) полуплоскости.

Очевидно, обратное не верно — это следует прямо из неравенства (20). Поэтому на основе этих неравенств без дополнительных условий построить критерии устойчивости полиномов невозможно. Сравнивая доказательства обеих теорем, видим, что подход в общем случае (теорема 2) оказался несколько проще и короче, чем в частном случае (теорема 1). Последнее является следствием жесткого требования – доказать неравенство (6) не выходя из класса вещественных матриц.

Заключение. В работе показана методика, позволившая найти новые, более простые доказательства классических результатов по локализации спектров линейных операторов и усилить один из них.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-07-00104

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дикусар В.В., Зеленков Г.А., Зубов Н.В. Определение местоположения собственных чисел матрицы с помощью квадратичных форм. // Тр. ИСА РАН, Динамика нелинейных систем, М., 2005. Т. 17. № 1. С. 108-111.
2. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – Москва: Наука, 1972. – 232с.

ABOUT LINEAR OPERATOR MATRIX SPECTRUM BOUNDS IN UNITARY SPACE

Zelenkov G. A., Zubov N. V.

(Russia, Novorossiysk, Moscow)

In this paper was described a new view on problem to get linear operators matrices' spectrums bounds evaluations using hermitian components in their additive expansion as in Euclidean as in unitary spaces. First case Bendixson's results was improved, second case simple and short proof of Hirsch theorems was found.