ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ: ФОКУСЫ ИЛИ ГАРМОНИКИ

Ракчеева Т. А.

(Россия, Москва)

Разработан и исследован метод аналитического приближения замкнутых кривых многофокусными лемнискатами. Аппроксимируемая кривая представляется при этом конечной совокупностью точек-фокусов внутри кривой. Параметрами фокусного приближения являются: количество и координаты фокусов. Разработаны алгоритмы построения приближения. Проведено сравнение аппроксимационных возможностей фокусного метода и классического метода гармонического приближения.

Важной задачей современной прикладной математики является аппроксимация эмпирических кривых или кривых, являющихся результатом сложных вычислительных конструкций. Аппроксимация выполняется с использованием того или иного класса функций, определяемого целевым назначением прикладной задачи. Наиболее распространенным классом функций является класс тригонометрических или алгебраических полиномов. Соответствующие методы хорошо разработаны.

В данной работе предлагается новый метод фокусной аппроксимации в классе функций, называемых лемнискатами.

Лемнискаты. Многофокусные лемнискаты представляют собой гладкие замкнутые кривые без самопересечений, не обязательно односвязные, содержащие внутри себя конечное число фокусов. Лемниската определяется через m точек-фокусов на плоскости и числовой параметр R как геометрическое место точек, для которого сохраняется постоянным, равным R, произведение расстояний до всех m фокусов (рис. 1.1). Определяющий инвариант лемнискаты можно записать как в вещественной, так и в комплексной форме:

$$\prod_{j=1}^{m} r_j = R^m \text{ или } \prod_{j=1}^{m} \left| z - f_j \right| = R^m,$$

где r_j – расстояние от произвольной точки лемнискаты до j-го фокуса, m - число фокусов ($j = 1, \ldots, m$), z – произвольная точка лемнискаты, f_j – комплексные координаты j-го фокуса, R – радиус лемнискаты.

Алгоритм построения лемнискаты. Для построения лемнискаты по заданным фокусам и радиусу разработан алгоритм, основанный на методе вариаций малых перемещений с использованием, кроме определяющего инварианта, таких свойств лемнискаты, как замкнутость, отсутствие самопересечений, охват всех фокусов. На первом этапе, перемещаясь малыми шагами от любого фокуса в произвольном направлении и вычисляя на каждом шаге радиус лемнискаты, находится точка лемнискаты с заданным значением R. На втором этапе прослеживающая процедура, перемещаясь вдоль изолинии радиуса R, определяет всю лемнискату. Для повышения точности на каждом шаге используется линейная интерполяция. С помощью этого алгоритма построено параметризованное по радиусу семейство трехфокусных лемнискат, представленное на рис. 1.2. а также семейство квазилемнискат с аддитивным инвариантом – многофокусных эллипсов (рис. 1.3).

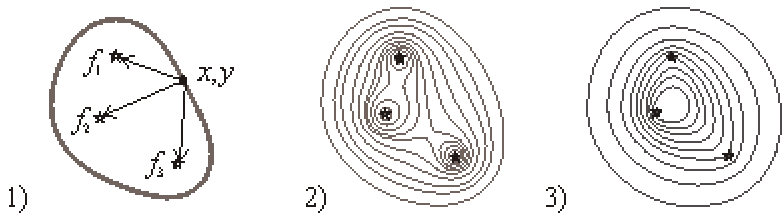

Рис. 1. Семейства трехфокусных кривых с мультипликативным (лемнискаты) и аддитивным (эллипсы) инвариантом

Аппроксимационные возможности многофокусных лемнискат исследовались Д.Гильбертом [1]. Им доказано, что при сформулированных условиях на кривую C всегда найдутся такая система фокусов и радиус, что отвечающая им лемниската пройдет в ε - окрестности любой точки кривой C для любого ε.

Эта теорема существования дает обоснование для фокусной аппроксимации. Вопрос же об определении для конкретной кривой параметров ее фокусного представления остался открытым.

Метод фокусного приближения. Задача фокусного приближения может быть сформулирована следующим образом:

Имеется гладкая замкнутая кривая C без самопересечений, не обязательно односвязная, заданная координатным описанием конечного набора своих точек $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 1,..., n$. *Требуется найти такую систему фокусов* $f_j = (a_j, b_j)$, $j = 1,..., m$, *что при определенном значении радиуса R соответствующая им лемниската будет близка с необходимой точностью к заданной кривой C в смысле выбранного критерия.*

Один из принципиальных вопросов фокусного метода – критерий близости двух кривых. Определены и работают два критерия, устанавливающие соответствие между степенью близости кривых C, L и:

а) минимаксным расстоянием между их точками (L-критерий)

$$\max_{p\in C}\min_{q\in L} d(p,q),$$

где d – расстояние в смысле обычной евклидовой метрики;

б) мерой отклонения значения радиуса вдоль кривой C от константы (R-критерий), например, в виде

$$\max_i \left| r_i - R^m \right| = \max_i \left| \prod_{j=1}^{m} r_{i,j} - R^m \right|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

L-критерий универсальный, он отвечает нашему интуитивному представлению о близости кривых, но он ресурсоемкий. R-критерий, напротив, специальный, вытекающий из инвариантного свойства лемнискаты сохранять постоянным значение радиуса, он менее нагляден, но проще в вычислениях. Эти критерии топологически эквивалентны: при стремлении к нулю расстояния между кривой и лемнискатой в смысле L-критерия стремятся к нулю и колебания радиуса на кривой (R-критерий) и наоборот [2].

Аналитическое определение параметров аппроксимирующей лемнискаты представляет собой значительные трудности, поэтому их поиск реализован алгоритмически в вещественном и комплексном вариантах [3]. Примеры приближения, как результаты работы «вещественного» алгоритма, приведены на рис. 2.

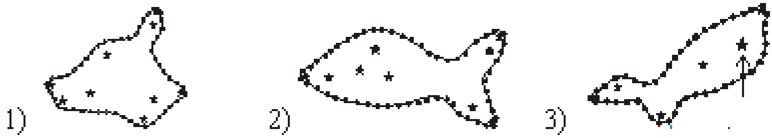

Рис. 2. Примеры фокусного приближения кривых («звездочками» отмечены фокусы, стрелка указывает на кратный фокус)

Алгоритм фокусного приближения (вещественный). Вещественный алгоритм, использующий универсальные методы оптимизации, имеет естественную интерпретацию (рис. 3). В начальный момент все фокусы сосредоточены в районе геометрического центра аппроксимируемой кривой. Предлагаемый алгоритм итерационный. Принципиальной особенностью его является пофокусное движение - на каждом шаге выполняется перемещение только одного фокуса при фиксированных положениях остальных. Каждая итерация содержит следующие компоненты:

1. выбор движущегося на данной итерации фокуса;
2. определение направления движения для выбранного фокуса;
3. определение пути, проходимого фокусом за одну итерацию;
4. проверка критерия качества приближения;
5. определение момента добавления нового фокуса;
6. определение начального положения нового фокуса;
7. проверка на выход из локального экстремума.

Различные реализации перечисленных компонент порождают большое разнообразие вариантов алгоритма.

Для оценки качества приближения алгоритм использует оба предложенных выше критерия (*R*-критерий в качестве рабочего, *L*-критерий для остановки алгоритма), но он не зависит от конкретной метрики критериев. Поэтому задание метрики L_2 или L_∞ в определении *R*- или *L*-критерия, и, соответственно, радиуса и направления движения фокуса, дает разные варианты алгоритма.

Главными определяющими компонентами алгоритма являются первые две, тесно связанные между собой. Так, если выбор направления связать с аппроксимируемой кривой, то это определит и выбор движущегося фокуса (*С*-вариант), если же исходить из выбора движущегося фокуса, то это определит и его направление (*F*-вариант). *С*-вариант анализирует качество приближения во всех точках кривой *С* и передвигает тот фокус и в том направлении, чтобы максимально улучшить ситуацию в худшем, в смысле качества приближения, месте кривой (рис 3.1). *F*-вариант задает априорно очередность движения фокусов, и перемещает в направлении, соответствующем общему улучшению ситуации (рис. 3.2).

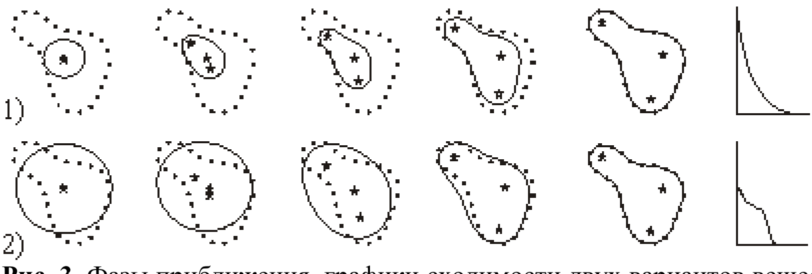

Рис. 3. Фазы приближения, графики сходимости двух вариантов вещественного алгоритма: 1) *C*-вариант в метрике L_∞, 2) F-вариант в метрике L_2

В общем случае число фокусов, необходимое для достижения требуемой точности приближения не известно. Для решения этой проблемы используется процедура размножение фокусов (рис. 4), состоящая в том, что при невозможности обеспечить требуемое приближение имеющимся числом фокусов либо в систему фокусов добавляется новый фокус в центре кривой (если критерий не уменьшается), либо раздваивается «застрявший» фокус (если критерий зациклился). Начальное число фокусов выбирается из условия заведомого отсутствия их избыточности.

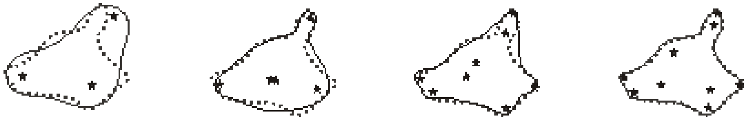

Рис.4. Фазы приближения с размножением фокусов

Алгоритм фокусного приближения (комплексный). Комплексный алгоритм использует уравнение многофокусной лемнискаты в виде: $|F(z)| = R^m$, где $F(z) = c_0 + c_1z + ... + c_{m-1}z^{m-1} + z^m$ — полином, имеющий своими корнями m фокусов лемнискаты. На первом этапе итерационная процедура ищет коэффициенты полинома $F(z)$, используя отображение $F(z_i)$, $i = 1, ..., n$, на единичную окружность. На втором этапе другая итерационная процедура находит m корней - фокусов лемнискаты. Из принципа аргумента следует, что при обходе точкой z лемнискаты точка $F(z)$ обходит единичную окружность m раз, по-разному растягивая различные ее фрагменты (рис. 6).

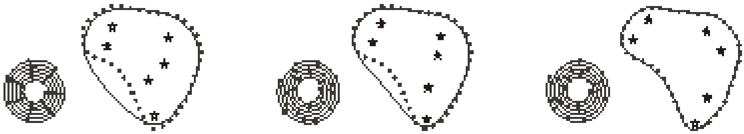

Рис. 6. Фазы приближения комплексным алгоритмом эмпирической кривой 6-ти фокусной лемнискатой

Сравнение методов приближения. Проведены сравнительные экспериментальные исследования аппроксимационных возможностей фокусного и гармонического методов приближения. На рис. 7.1 приведены результаты «перекрестного» приближения с равной точностью: аналитическая кривая фокусного происхождения (6 фокусов, 13 параметров) приближалась гармониками (4 гармоники, 18 параметров), а гармоническая кривая (3 гармоники, 14 параметров) приближалась фокусами (4 фокуса, 9 параметров). Приближения одной и той же эмпирической кривой с достижением приблизительно одинаковой точности (рис. 7.2) было обеспечено 9 фокусами (19 параметров) и 5 гармониками (22 параметра).

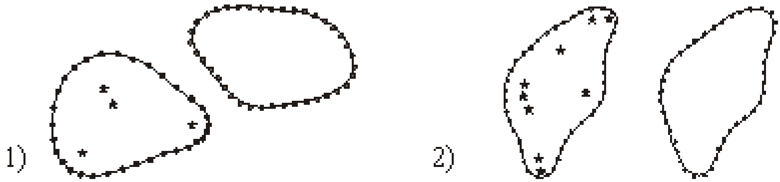

Рис. 7. Приближение кривых фокусным и гармоническим методами

Проведенное сравнительное исследование показало, что для достижения примерно равной точности в ряде специфических случаев больше параметров требовалось фокусному методу, в других -–гармоническому, но в целом фокусный метод и гармонический требуют приблизительно одинаковую сложность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hilbert D. Gessamelte Abhandlungen. -Berlin Springer, 1935. -Bd. 3. .435 s.
2. Ракчеева Т.А. Приближение кривых многофокусными лемнискатами // Человеко-машинные системы и анализ данных: [сб. науч. тр.] / науч. ред. И.А. Овсеевич. - Москва: Наука, 1992. с.93-110.
3. Ракчеева Т.А. Алгоритм фокусного приближения кривых // Человеко-машинные системы и анализ данных: [сб. науч. тр.] / науч. ред. И.А. Овсеевич. - Москва: Наука, 1992. с.111-129.

APPROXIMATION of CURVES: FOCUSES OR HARMONICS

Rakcheeva T. A.

(Russia, Moscow)

The method of analytical approximation of the smooth closed curves by multifocal lemniscates is investigated and developed. The curve is represented thus by final set of points-focuses inside a curve. Parameters of focal approximation are: quantity and coordinates of focuses. The algorithms of construction of approximation are developed. The comparison of opportunities of a focal method and classical method of harmonic approximation is carried out.