ИССЛЕДОВАНИЕ НУЛЬ-УПРАВЛЯЕМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИММЕТРИЙ

Яковенко Г. Н.

(Россия, Долгопрудный)

Рассматривается задача о переводе произвольного состояния управляемой системы в начало координат. Для решения задачи привлекаются симметрии разных типов: сдвиг решений вдоль одной из координатных осей, увеличение времени процесса с целью сделать управление допустимым, сопоставление нескольким управляемым процессам многопараметрического процесса. Методика решения задачи продемонстрирована на примере трёхмерной управляемой системы.

Решается задача нуль-управляемости трёхкратного интегратора $\dddot{x} = u$, $|u| \le 1$. В нормальном виде уравнение имеет вид ($x = x_1$):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u. \tag{1}$$

Требуется допустимым управлением $|u(t)| \le 1$ за ограниченное время T перевести систему из начального состояния (x_1^0, x_2^0, x_3^0) в начало координат (0, 0, 0).

Преобразованием симметрии системы (1) называется замена переменных $\hat{t} = \hat{t}(t,x)$, $\hat{x} = \hat{x}(t,x)$, $\hat{u} = \hat{u}(t,x,u)$, переводящая систему (1) в систему $\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2$, $\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3$, $\dot{\hat{x}}_3 = \hat{u}$ с такими же правыми частями, как и у исходной системы. Эквивалентное определение: **преобразование симметрии** $\hat{t} = \hat{t}(t,x)$, $\hat{x} = \hat{x}(t,x)$, $\hat{u} = \hat{u}(t,x,u)$ переводит любое решение $\{ x(t), u(t) \}$ системы (1) в её же решение $\{\hat{x}(\hat{t}),\ \hat{u}(\hat{t})\}$.

Для решения задачи нуль-управляемости будет построена совокупность преобразований симметрии, в результате применения которых тривиальное решение $\{x(t)\equiv 0,\ u(t)\equiv 0\}$ переводится в допустимые решения $\{\hat{x}(\hat{t}),\ \hat{u}(\hat{t})\}$ с требуемыми начальными $\hat{x}(0)=x^0$ и конечными $\hat{x}(T)=0$ условиями.

Нетрудно убедиться в том, что однопараметрическая группа (a_1 — параметр, $g(t)$ — произвольная функция)

$$\begin{aligned}&\hat{t}=t,\quad \hat{x}_1=x_1+a_1 g(t),\quad \hat{x}_2=x_2+a_1\dot{g}(t),\\&\hat{x}_3=x_3+a_1\ddot{g}(t),\quad \hat{u}=u+a_1\dddot{g}(t)\end{aligned}\tag{2}$$

переводит систему (1) в систему с такими же правыми частями, как и у (1), то есть преобразования (2) — преобразования симметрии системы (1). Распорядимся выбором функции $g(t)$ так, чтобы решение $\{x(t)\equiv 0,\ u(t)\equiv 0\}$ переходило в решение с начальными данными (при $t=0$) на оси x_1 и с конечными (при $t=1$) — (0, 0, 0). Этим условиям удовлетворит, например, функция $g(t)=(1-t)^3(1+3t+6t^2)$. Подстановка $g(t)$ и $\{x(t)\equiv 0,\ u(t)\equiv 0\}$ в (2) даст совокупность решений системы (1), удовлетворяющих граничным условиям (3):

$$\begin{aligned}&x_1(t)=a_1(1-t)^3(1+3t+6t^2),\quad x_2(t)=-30a_1(1-t)^2t^2,\\&x_3(t)=-60a_1(1-t)(1-2t)t,\quad u(t)=-60a_1(1-6t+6t^2)\end{aligned}\tag{3}$$

(для «новых» переменных сохраняем исходные обозначения). Решение (3) на интервале $0\le t\le 1$ переводит произвольное начальное состояние на оси x_1 (с произвольным параметром a_1) в начало координат. Для управления на интервале $0\le t\le 1$ выполняется $|u(t)|\le 60|a_1|$, то есть не любое решение является допустимым: при $60|a_1|>1$ не выполняется $|u(t)|\le 1$. С целью вместить управление в нужные пределы привлечём ещё одну групп симметрий системы (1)

$$\hat{t} = \lambda t, \quad \hat{x}_1 = x_1, \quad \hat{x}_2 = \lambda^{-1} x_2, \quad \hat{x}_3 = \lambda^{-2} x_3, \quad \hat{u} = \lambda^{-3} u \tag{4}$$

каждая замена переменных (4) в системе (1) приводит к системе с такой же правой частью. Преобразования (4) не меняют начальное положение на оси x_1, могут влиять на пределы изменения управления u, одновременно преобразуя время процесса $0 \le t \le T$. Для того, чтобы управление стало допустимым $|u(t)| \le 1$ достаточно сделать следующий выбор $\lambda^3 = 60|a_1|$, который повлияет на время процесса следующим образом: $T = \lambda = (60|a_1|)^{1/3}$. Из полученного выражения параметр a_1 выражается через время процесса: $a_1 = \dfrac{\lambda^3}{60}\operatorname{sign} a_1 = \dfrac{T^3}{60}\operatorname{sign} a_1$. Подстановка λ и уравнений (3) в (4), затем подстановка a_1 приводит к решению системы (1)

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{T^3}{60}\left\{1 - \left(\frac{t}{T}\right)\right\}^3 \left\{1 + 3\left(\frac{t}{T}\right) + 6\left(\frac{t}{T}\right)^2\right\}\operatorname{sign} a_1, \\
x_2(t) &= -\frac{T^2}{2}\left\{1 - \left(\frac{t}{T}\right)\right\}^2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 \operatorname{sign} a_1, \\
x_3(t) &= -T\left\{1 - \left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left\{1 - 2\left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left(\frac{t}{T}\right)\operatorname{sign} a_1, \\
u(t) &= -\left\{1 - 6\left(\frac{t}{T}\right) + 6\left(\frac{t}{T}\right)^2\right\}\operatorname{sign} a_1,
\end{aligned} \tag{5}$$

которое на интервале $0 \le t \le T$ допустимым управлением $|u(t)| \le 1$ переводит точку

$$\left(\frac{T^3}{60}\operatorname{sign} a_1, 0, 0\right), \tag{6}$$

расположенную на оси x_1, в начало координат (0, 0, 0) (параметр. a_1 в (6) и (7) определяет на какой полуоси — положительной или отрицательной — находится начальная точка).

Аналогичные рассуждения приводят к решению системы (1)

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{T^3}{36}\left\{1-\left(\frac{t}{T}\right)\right\}^3\left\{1+3\left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left(\frac{t}{T}\right)\operatorname{sign}a_2,\\
x_2(t) &= \frac{T^2}{36}\left\{1-\left(\frac{t}{T}\right)\right\}^2\left\{1+2\left(\frac{t}{T}\right)-15\left(\frac{t}{T}\right)^2\right\}\operatorname{sign}a_2,\\
x_3(t) &= -\frac{T}{3}\left\{1-\left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left\{3-5\left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left(\frac{t}{T}\right)\operatorname{sign}a_2,\\
u(t) &= -\left\{1-\frac{16}{3}\left(\frac{t}{T}\right)+5\left(\frac{t}{T}\right)^2\right\}\operatorname{sign}a_2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

которое на интервале $0 \le t \le T$ допустимым управлением $|u(t)| \le 1$ переводит точку

$$
\left(0, \frac{T^2}{36}\operatorname{sign}a_2, 0\right),
\tag{8}
$$

расположенную на оси x_2, в начало координат (0, 0, 0).

Рассуждения, близкие к проведённым выше, приводят к решению системы (1)

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{T^3}{18}\left\{1-\left(\frac{t}{T}\right)\right\}^3\left(\frac{t}{T}\right)^2\operatorname{sign}a_3,\\
x_2(t) &= \frac{T^2}{18}\left\{1-\left(\frac{t}{T}\right)\right\}^2\left\{2-5\left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left(\frac{t}{T}\right)\operatorname{sign}a_3,\\
x_3(t) &= \frac{T}{9}\left\{1-\left(\frac{t}{T}\right)\right\}\left\{1-8\left(\frac{t}{T}\right)+10\left(\frac{t}{T}\right)^2\right\}\operatorname{sign}a_3,\\
u(t) &= -\left\{1-4\left(\frac{t}{T}\right)+\frac{10}{3}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right\}\operatorname{sign}a_3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

которое на интервале $0 \le t \le T$ допустимым управлением $|u(t)| \le 1$ переводит точку

$$\left(0,0,\frac{T}{9}\operatorname{sign}a_3\right), \tag{10}$$

расположенную на оси x_3, в начало координат (0, 0, 0).

Для окончательного решения задачи определим мульти-уравнение $\ddot{x}=u$, $|u|\le 1$, $\ddot{y}=v$, $|v|\le 1$, $\ddot{z}=w$, $|w|\le 1$ и его очевидную группу симметрий

$$\begin{aligned} &\hat{t}=t, \quad \hat{x}=b_1x+b_2y+b_3z, \quad \hat{u}=b_1u+b_2v+b_3w, \\ &\hat{y}=y, \quad \hat{v}=v, \quad \hat{z}=z, \quad \hat{w}=w \end{aligned} \tag{11}$$

и выделим из него семейство выпуклых преобразований

$$0\le b_k\le 1, \qquad b_1+b_2+b_3=1. \tag{12}$$

Преобразование (11), (12) переводит три допустимых решения уравнения $\ddot{x}=u$, $|u|\le 1$ в его же допустимое решение:

$$|\hat{u}|=|b_1u+b_2v+b_3w|\le b_1|u|+b_2|v|+b_3|w|\le b_1+b_2+b_3=1.$$

Выпуклое преобразование (11), (12) переводит три решения (5), (7, (9) в допустимое решение с конечной точкой (0, 0, 0) и с начальной точкой (см. (6), (8), (10))

$$\hat{x}_1^0=b_1\frac{T^3}{60}\operatorname{sign}a_1, \quad \hat{x}_2^0=b_2\frac{T^2}{36}\operatorname{sign}a_2, \quad \hat{x}_3^0=b_3\frac{T}{9}\operatorname{sign}a_3. \tag{13}$$

Из (14) следует

$$\operatorname{sign}a_k=\operatorname{sign}x_k^0, \quad b_1=\frac{60}{T^3}|\hat{x}_1^0|, \quad b_2=\frac{36}{T^2}|\hat{x}_2^0|, \quad b_3=\frac{9}{T}|\hat{x}_3^0|. \tag{14}$$

Условия выпуклости (13) определяют уравнение для T

$$\frac{60}{T^3}|\hat{x}_1^0|+\frac{36}{T^2}|\hat{x}_2^0|+\frac{9}{T}|\hat{x}_3^0|=1. \tag{15}$$

Алгоритм решения задачи $(\hat{x}_1^0,\hat{x}_2^0,\hat{x}_3^0)\to(0,0,0)$.

а) Найти из уравнения (15) время процесса T.

б) Из соотношений (14) найти $\operatorname{sign} a_k, b_1, b_2, b_3$.

в) Составить выпуклую комбинацию решений (5), (7), (9).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00940)

RESEARCH of ZERO-CONTROLLABILITY with USAGE of SYMMETRIES

Yakovenko G. N.

(Russia, Dolgoprudny)

The task about translation of an arbitrary state of the controlled system in an origin of coordinates is considered. For solution of the task the symmetries of different types are attracted: shift of solutions along one of coordinate axises, increase of time of the process with the purpose to make control admitted, comparison to several controlled processes of the multiparameter process. The technique of solution of the task is shown on an example of the three-dimensional controlled system.