

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Корухова Е. С., Пасконов В. М.

(Россия, Москва)

*В данной работе рассматривается задача моделирования трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости численным методом покоординатного расщепления. Проведена визуализация в виде графиков полученных решений. При некоторых определяющих параметрах задачи получены вихревые структуры, близкие по своим характеристикам к турбулентному течению.*

**Постановка задачи о нестационарном трехмерном течении вязкой несжимаемой жидкости в канале прямоугольного сечения.** Исследуется задача течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале. Рассматривается бесконечная “батарея” плоских каналов, расположенных строго параллельно друг к другу (рис.1). Все каналы имеют одинаковую конечную длину, одинаковую ширину и высоту.

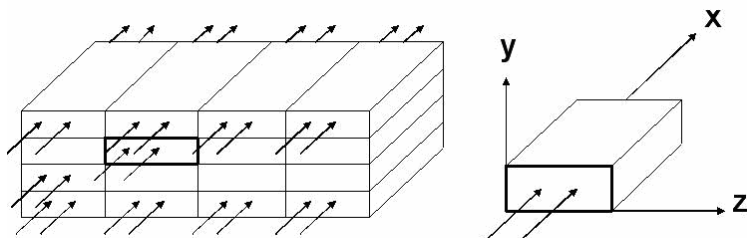


Рис. 1. Постановка задачи

Исследование течения проводится для одного прямоугольного канала длиной  $L_x = 2$ , высотой  $L_y = 1$ , шириной  $L_z = 2$ . В начальный момент времени канал заполнен покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью. Течение в канале возникает за счет инъекции такой же жидкости при  $x = 0$ . Предполагается, что за выходным сечением канала находится пространство, также затопленное жидкостью. В качестве характерной длины выбрана высота боковой стенки канала, характерной скорости — максимальная скорость инжектирующей жидкости при  $x = 0$ .

Граничные условия ставятся следующим образом. На нижней, верхней, боковой левой и боковой правой стенках канала задаются условия прилипания для скорости и условия теплоизоляции для температуры. На выходной границе канала используются “мягкие” граничные условия. В качестве начальных условий использованы условия покоя для скорости и постоянства температуры во всей расчетной области.

Запишем полную систему уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + (\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \Phi, \quad (4)$$

где

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$p = T. \quad (6)$$

Обозначения:  $t$  — время,  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости соответственно по координатным осям  $x, y, z$ ;  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $\Phi$  — диссипативная функция, параметр подобия — число Рейнольдса  $Re = V'L'/\nu'$ , число Прандтля и показатель адиабаты взяты для воздуха  $Pr = 0,72$ , отношение удельных теплоемкостей  $\gamma = c'_p / c'_v = 1,4$ ,  $M$  — число Маха (отношение скорости к скорости звука). Штрихованные величины относятся к инжектируемому потоку при  $x = 0$ .

Эта система записана для течения вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что значение  $\rho = const$  и  $\rho = 1$ .

Полученная система уравнений содержит три уравнения количества движения (1), (2), (3), уравнение энергии (4), записанное относительно температуры, уравнение неразрывности (5) и уравнение состояния (6). До того, как мы предположили  $\rho = const$  и  $\rho = 1$ , система уравнений была замкнутая - в ней 6 уравнений и 6 неизвестных. Однако теперь уравнение состояния (6) дает линейную связь давления и температуры и, следовательно, существует проблема выбора: одно из пяти дифференциальных уравнений необходимо при расчете отбросить. Отбрасывая уравнение энергии (4), теряется и уравнение состояния (6), в результате — классический подход: описание изотермического течения с давлением, которое находится из уравнения Пуассона. Следуя [1], в данной работе используется неклассический подход к решению этой системы уравнений: расчеты ведутся на основе системы уравнений количества движения (1), (2), (3) и уравнения энергии (4), которые выводятся с использованием закона сохранения массы (5) [2– 4]. Уравнение (5) используется в качестве контрольного соотношения, и, как показали расчеты, закон сохранения массы выполняется с достаточно высокой точностью при расчетах.

Все вычисления проводятся в соответствующей расчетной области:  $L_x = 2, L_y = 1, L_z = 2$  (рис.1).

Начальные условия: в момент времени  $t = 0$  канал заполнен покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью — внутри канала и на его стенках  $u = v = w = 0$  при начальной температуре  $T = 1$ .

Условие возникновения течения в канале по всему начальному сечению канала можно сформулировать как:  $u = 1$ ,  $v = w = 0$ ,  $T = 1$  для  $t \geq 0$ .

**Численный метод решения задачи.** Процесс расчета при переходе от предыдущего временного слоя к последующему осуществлялся в три этапа на дробных временных слоях (численный метод покоординатного расщепления): на первом из них решалась система четырех уравнений разностным методом для “x-расщепления”, на втором этапе — соответствующая система “y-расщепления” и на третьем — на следующем временном слое — “z-расщепления”. На каждом из этих этапов проводились итерации по нелинейности с использованием уже полученных значений на предыдущем дробном шаге. Нужно отметить, что схемы неявные и содержат неизвестные функции на слое  $s + 1/3$  в системе уравнений для “x-расщепления”, слое  $s + 2/3$  в системе уравнений для “y-расщепления” и слое  $s + 1$  в системе уравнений для “z-расщепления”. Системы уравнений для определения искомых величин на целом и полужелых слоях решаются с помощью одномерной прогонки. В результате на следующем временном слое получалось только первое приближение решения. Окончательное решение на временном слое достигалось с помощью последующих глобальных итераций, содержащих внутри все три этапа расщепления со своими внутренними итерациями. Следует отметить, что число глобальных итераций по нелинейности всегда превышало число итераций на дробных шагах. Точность решения проверялась путем вычисления максимума модуля интеграла от дивергенции вектора скорости по объему каждой ячейки трехмерной сетки. Этот численный метод был реализован в программе на языке Си. Впоследствии эта программа была распараллелена с помощью технологии параллельного программирования OpenMP для вычислений на многопроцессорном вычислительном комплексе Regatta.

**Обсуждение результатов расчетов.** Полученные результаты работы представлены в виде графиков поверхностей продольных и поперечных составляющих вектора скорости, а также

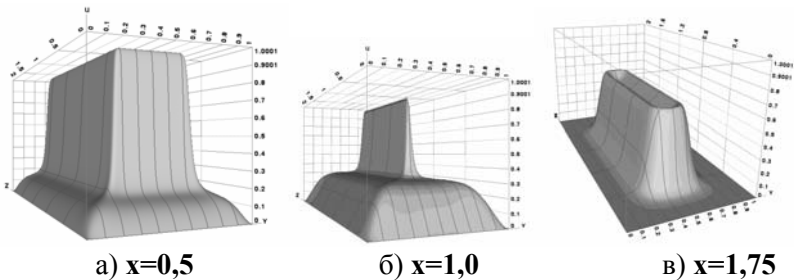
поля направлений вектора скорости в поперечных сечениях канала при различных значениях  $x$ . Также в работе были исследованы поверхности вихря для каждой компоненты скорости и векторные поля для вихря в различных сечениях вдоль направления оси  $x$ .

Представим полученные результаты расчетов при числе Рейнольдса  $Re = 500$ , числе Маха  $M = 0,03$  и длине канала  $L_x = 2$ . Расчеты были проведены на сетке  $161 \times 161 \times 321$ . При этом максимум модуля интеграла от дивергенции по всем ячейкам сетки не превышал  $0,00004$  – это показывает высокую точность выполнения закона сохранения массы.

В начальном сечении при  $x = 0$  происходит формирование параболоида  $u$  на прямоугольном основании. Это решение значительно отличается от результатов, полученных в работе [1]. Максимальное значение продольной составляющей скорости остается в центральной части канала в виде прямой линии и равно  $u = 1,0$ . При дальнейшем распространении вдоль канала с увеличением  $x$  начинается уменьшение  $u$  по всему сечению канала. Наблюдается изменение конфигурации параболоида. Наблюдается уменьшение значения  $u$  и смещение области возмущения от стенок. При  $x = 0,175$  замечен резкий скачок значения  $u$ . После этого значения  $u$  начинают уменьшаться и при  $x = 0,2375$  все возмущения прекращаются.

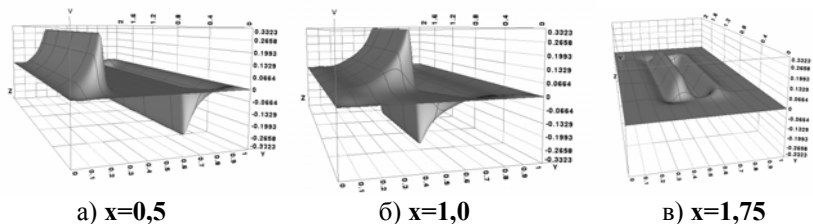
Но не только изменение продольной составляющей скорости вдоль канала характеризует структуру течения. При рассмотрении поперечных составляющих скорости  $v$  и  $w$  можно заметить, что их поверхности над плоскостью сечения канала повернуты на  $90$  градусов, а их величины меняются в одинаковых пределах. Похожая структура течения была замечена и в случае квадратного сечения канала. При рассмотрении поверхности поперечной составляющей скорости  $v$  можно заметить, что до  $x = 0,1125$  идут симметричные возмущения до максимального значения  $v = \pm 0,1595$ . Потом появляются возмущения в отрицательную плоскость. При  $x = 0,25$  все возмущения прекращаются, и образуется плоскость  $v = 0$ .

Поверхность поперечной составляющей скорости  $v$  представляет собой две волны, идущие от противоположных стенок. При  $x = 1$  две волны от противоположных стенок встречаются в центре канала. До этого же можно заметить равномерное распространение волн от стенок канала с постепенным увеличением максимального значения  $v$ . При  $x = 1,75$  волна меняет знак, переходя из одной плоскости в другую. В интервале от  $x = 1$  до  $x = 1,75$  волна постепенно уменьшается. В интервале от  $x = 1,75$  до  $x = 2$  постепенно увеличивается значение  $v$ . Это связано с возникновением вторичных течений от стенок канала.

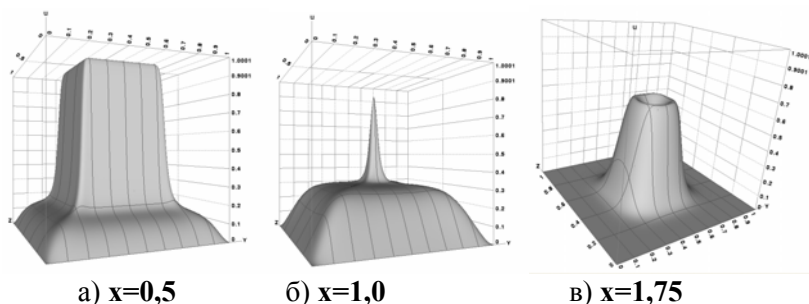


**Рис. 2.** Поверхность продольной составляющей скорости  $u$  в канале прямоугольного сечения при  $Re=500$ ,  $t=0,5$  в различных сечениях по оси  $x$

На рис.2, рис.3 и рис.4 приведены при  $t=0,5$  графики поверхностей полученных решений.



**Рис. 3.** Поверхность поперечной составляющей скорости  $v$  в сечении  $x=0,5$  в канале прямоугольного сечения при  $Re=500$ ,  $t=0,5$  в различных сечениях по оси  $x$



**Рис. 4.** Поверхность продольной составляющей скорости  $u$  в сечении  $x=0,5$  в канале квадратного сечения с заданными размерами канала:  $L_x=2, L_y=1, L_z=1$  при  $Re=500, t=0,5$  в различных сечениях по оси  $x$

**Закключение.** Проведены многочисленные расчеты для задач течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах квадратного и прямоугольного сечения, при различных числах Рейнольдса и при различных параметрах сетки. Результаты расчетов представлены в графическом виде. Исследование результатов расчетов показало, что при некоторых определяющих параметрах задачи получены новые вихревые структуры течения, близкие по своим характеристикам к турбулентному течению.

Этот основной результат получен благодаря разработанной методике расчета для многопроцессорного вычислительного комплекса “Regatta” с общедоступной памятью. Эта методика включает в себя параллельную программу на языке Си с использованием технологии OpenMP для решения поставленной задачи и новую методику проведения расчетов сеансами, что позволяет проводить расчеты более эффективно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин С.Б., Пасконов В.М. Численное исследование нестационарного трехмерного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения на основе модели Навье-Стокса. Вестник Московского университета, №1, 2006, с. 16-23.

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974, 711 с.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Наука, 1973, 847 с.
4. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Часть 1, “Наука”, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991, 600 с.

**MODELING OF THREE-DIMENTIONAL CURRENT OF A  
VISCIOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID IN A SQUARE-  
SECTIONED CHANNEL**

**Korukhova E. S., Paskonov V. M.**

(Russia, Moscow)

*The work describes the modeling of three-dimentional current of a viscous incompressible liquid. This task is solved using the coordinate-splitting method. All the results are presented in a graphic form. With special parameters of task we obtained a new structure of a current like is the turbulent current.*