

## РЕКОНСТРУКЦИЯ СИСТЕМЫ С ЖЁСТКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ МЕТОДОМ РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ

Зульпукаров М.-Г. М., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В.

(Россия, Москва)

*Обсуждается построение простейшей системы, работающей в режиме с характеристиками, соответствующими режиму жёсткой турбулентности в отображении Ершова. Рассматривается пример использования метода русел и джокеров, комбинирующего детерминированные и вероятностные способы описания поведения системы.*

Как известно, аппарат нелинейной динамики при решении задач, связанных с построением предсказывающей модели на основе известной истории поведения объекта, наиболее эффективен в случаях, когда размерность модели невелика. Задачи большой размерности можно решать, используя неоднородность фазового пространства: состояние системы зачастую может быть с приемлемой точностью охарактеризовано небольшим количеством переменных – так называемых *параметров порядка*. Прочие переменные при этом подчинены параметрам порядка и/или несущественны.

В некоторых случаях параметры порядка могут быть выделены не во всём фазовом пространстве, но в его отдельных областях. Такие области называются *руслами*. В областях, где это не представляется возможным, для описания движения используются *джокеры* – простые приближённые правила (алгоритмы), зачастую, вероятностные, так как поведение системы вне русел отличается сложностью, непредсказуемостью и разнообразием [1].

Одно из перспективных направлений нелинейной динамики – исследование редких катастрофических событий и разработка методов их моделирования. Как правило, объект изучения, демонстрирующий подобные явления, представляет собой сложную систему, причём информация об устройстве системы и принципах её функционирования может быть неполна и/или неточна, причины катастрофы неясны, а статистические данные недостаточны.

В качестве примера такой ситуации можно привести аварии на океанских буровых платформах, входящих в список самых дорогих и масштабных сооружений техногенной цивилизации. Ряд исследователей высказывает предположение, что причиной аварий могут быть нелинейные явления на поверхности атмосфера–океан.

Одно из центральных мест в области моделирования процессов на границе водной и воздушной сред занимает двумерное обобщение уравнения Курамото-Цузуки (Гинзбурга–Ландау) [2,3]

$$W_t = (1 + ic_0)W + (1 + ic_1)\Delta W - (1 + ic_2)|W|^2 W,$$

где  $W$  – некоторая комплекснозначная функция действительных переменных, а  $c_0$ ,  $c_1$  и  $c_2$  – действительные постоянные. При определённом соотношении значений параметров в данной системе можно наблюдать *жёсткую турбулентность* – хаотический режим с редкими и очень сильными выбросами.

Один из вариантов упрощённого (качественного) описания жёсткой турбулентности основан на использовании систем, демонстрирующих *переключающуюся перемежаемость*. Данный режим характеризуется наличием устойчивого инвариантного многообразия, поочередно теряющего и возвращающего устойчивость. В результате потери устойчивости происходит выброс, а в результате возврата устойчивости – спад. В промежутках между выбросами происходит хаотическое движение на инвариантном многообразии.

Примером системы, в которой можно наблюдать подобный режим, является трёхмерное *отображение Эршова* [4]

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, k_{x,n}, a_n) + \gamma \frac{y_n}{1 + |y_n|}, & k_x = \begin{cases} k_x^+ > 1, & y \geq y_{cr} \\ k_x^- < 1, & y < y_{cr} \end{cases} \\ y_{n+1} = f(y_n, k_{y,n}, a_0) - \gamma_0 \frac{\varepsilon x_n}{1 + \varepsilon |x_n|}, & k_y = \begin{cases} k_y^+ > 1, & x \leq x_{cr} \\ k_y^- < 1, & x > x_{cr} \end{cases} \\ E_{n+1} = E_n - \varepsilon(E_n + x_n) \end{cases} \quad (1)$$

$$a(E) = a_\infty \frac{E}{E + E_{cr} \left( \frac{a_\infty}{a_{cr}} - 1 \right)}$$

Здесь  $x$ ,  $y$  и  $E$  – переменные,  $a_0$ ,  $a_{cr}$ ,  $a_\infty$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $E_{cr}$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $x_{cr}$ ,  $y_{cr}$  – параметры, а  $f$  – кусочно-линейная функция, определяющая характер одномерных отображений по  $x$  и  $y$ :

$$f(x, k, a) = \begin{cases} \frac{2}{a-1}x + \frac{1+a}{1-a}, & x \geq a \\ \frac{3}{2a+2}x + \frac{2-a}{2a+2}, & -1 \leq x < a \\ kx + k - \frac{1}{2}, & x < -1 \end{cases}$$

Переключающуюся перемежаемость в отображении Ершова реализуется следующим образом. Пока значение «медленной» ( $\varepsilon \ll 1$ ) переменной  $E$  превышает пороговое ( $E > E_{cr}$ ), в пространстве переменных  $x$  и  $y$  имеется хаотический аттрактор с некоторой конечной областью притяжения. При уменьшении  $E$  до порогового значения и далее, происходит кризис аттрактора – границы аттрактора и его области притяжения соприкасаются. Вследствие этого происходит выброс – уход с аттрактора по координате  $x$  и экспоненциальный рост:

$$x_n \sim (k_x^+)^n. \quad (2)$$

Одновременно начинается рост  $E$ , и с некоторым запаздыванием –  $y$ . Далее, когда переменные  $x$  и  $y$  достигают пороговых значений  $x_{cr}$  и  $y_{cr}$ , происходит смена коэффициентов ( $k_x^+$  на  $k_x^-$  и  $k_y^+$  на  $k_y^-$ ), и аттрактор становится глобально притягивающим по  $x$  и по  $y$ . Рост  $x$  и  $y$  сменяется спадом:

$$x_n \sim (k_x^-)^n, \quad (3)$$

значение  $E$  медленно уменьшается, пока не произойдёт новый выброс, и так далее.

Обратная задача ставится следующим образом. Дана система (1), работающая в режиме жёсткой турбулентности. Внутреннее устройство системы скрыто, и из трёх порождаемых ею временных рядов,  $E_n$ ,  $x_n$  и  $y_n$ , доступен для наблюдения только один –  $x_n$ . Требуется построить простую (модельную) систему, порождающую временной ряд с аналогичными характеристиками.

Поскольку информация наблюдателя об исходной системе неполна, целесообразно учитывать как динамические, так и статистические характеристики наблюдаемого временного ряда. При построении модельной системы имеет смысл совместно использовать динамические и вероятностные компоненты, то есть, задействовать метод русел и джокеров.

Главная особенность наблюдаемого временного ряда – наличие редких сильных выбросов, чередующихся с длительными межпиковыми интервалами. Поэтому, при построении модели были выделены характеристики выбросов (распределение максимумов пиков, динамика роста и спада) и характеристики межпиковых интервалов (продолжительность, межпиковая динамика). Распределение максимумов пиков – степенное [4],

$$\rho_{x_{\max}}(x) = \begin{cases} a_x (-x)^{-b_x}, & x \leq B_x; \\ 0, & x > B_x \end{cases}; \quad a_x > 0, b_x > 0, B_x < 0. \quad (4)$$

Распределение длительности межпиковых интервалов – экспоненциальное:

$$\rho_N(n) = \begin{cases} a_n e^{-b_n n}, & n \geq B_n; \\ 0, & n < B_n \end{cases}; \quad a_n > 0, \quad b_n > 0, \quad B_n > 0.$$

Здесь  $a_x, b_x, B_x, a_n, b_n, B_n$  – константы. Их истинные значения неизвестны, и в модели используются полученные на основе статистических данных оценки  $\hat{a}_x, \hat{b}_x, \hat{B}_x, \hat{a}_n, \hat{b}_n$  и  $\hat{B}_n$ , а также оценки коэффициентов роста и спада  $\hat{k}_x^+$  и  $\hat{k}_x^-$  и границ области межпиковой динамики  $[\hat{D}_{x,\min}, \hat{D}_{x,\max}]$ .

При рассмотрении временного ряда  $x_n$  выделяется фаза межпиковой динамики, событие перехода от межпиковой динамики к росту пика, фаза роста, событие остановки роста (достижения максимума пика), фаза спада и событие перехода от спада к межпиковой динамике. Динамика в фазах роста и спада описывается простыми уравнениями (2) и (3), поэтому, для моделирования роста и спада введены два русла,  $C_1$  и  $C_2$ , соответственно. Поскольку рост и спад пика происходят в одной и той же области фазового пространства, область русла  $C_2$  совпадает с областью русла  $C_1$ , и требуется уточнить, какое из русел в данный момент считается действующим.

Межпиковая динамика хаотична, переход от неё к росту пика случаен (инициирующая переход переменная  $E$  не наблюдается). По этой причине для их описания использован джокер, обозначенный  $J_1$ . Достижение максимума пика – также случайное событие (смена динамики не следует из уравнения роста, инициирующая её переменная  $y$  не наблюдается). Для его описания использован джокер, обозначенный  $J_2$ .

Действие джокера  $J_2$  заключается в переключении с русла  $C_1$  на русло  $C_2$ , аналогично описанному в [5] джокеру типа «шов». Разница заключается в определении времени и места переключения: координата изображающей точки в момент переключения представляет собой максимум пика – случайную величину. По-

этому, джокер задействуется с вероятностью, зависящей от значения  $x$  на данной итерации:  $p = p_{J_2}(x)$ . Задача сводится к поиску функции  $p_{J_2}(x)$ , обеспечивающей распределение максимумов, совпадающее с (4). Можно показать, что требуемое распределение обеспечивается функцией вида

$$p_{J_2}(x) = \begin{cases} p_x = 1 - (k_x^+)^{-b_x+1}, & x \leq B_x, \\ 0, & x > B_x \end{cases}, \quad (5)$$

если распределение значений  $x$ , с которых начинается рост пика, равно

$$\rho_{x_0}(x) = \alpha_x (-x)^{-b_x}; \quad x \in (k_x^+ A_x, A_x], \quad B_x < A_x < D_{x,\min} < 0. \quad (6)$$

Коэффициент  $\alpha_x$  находится из условия нормировки; выбор константы  $A_x$  произволен в указанных пределах, но для обеспечения сходства наблюдаемого и модельного временных рядов в начальной фазе роста пика рекомендуются значения порядка  $D_{x,\min}$ .

Моделирование межпиковой динамики джокером  $J_1$  заключается в случайном отображении отрезка  $[D_{x,\min}, D_{x,\max}]$  на себя.

Для простоты, на каждой итерации  $x_n$  присваивается реализация случайной величины, равномерно распределённой на данном отрезке.

Вторая обязанность  $J_1$  – обеспечение заданной длительности межпиковых интервалов. Прекращение джокером межпиковой фазы происходит с вероятностью, зависящей от номера итерации,  $p_{J_1}(n)$ . Можно показать, что требуемое распределение обеспечивается функцией вида

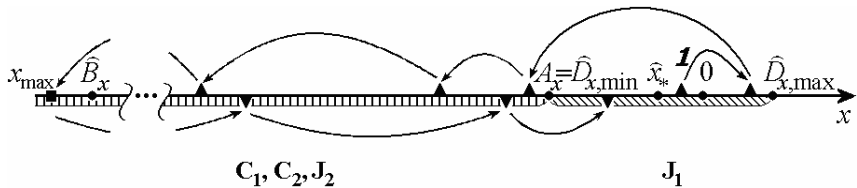
$$p_{J_1}(n) = \begin{cases} p_n = b_n, & n \geq B_n \\ 0, & n = 0, \dots, B_n - 1 \end{cases}. \quad (7)$$

Третья обязанность  $J_1$  – формирование распределения на-

чальных значений (6) для роста пика по окончании межпиковой фазы. После этого задействуется русло  $C_1$ .

Наконец, джокер  $J_1$  отвечает за переход от отображения в соответствии с уравнением русла  $C_2$  (спада) к межпиковой динамике. Переход выполняется при попадании изображающей точки на интервал  $[D_{x,\min}, D_{x,\max}]$ .

Окончательно, построенная модель представляет собой систему русел и джокеров  $J_1-C_1-J_2-C_2$  (рис. 1). Джокер  $J_1$  действует в области  $[\hat{D}_{x,\min}, \hat{D}_{x,\max}]$ , русла  $C_1$  и  $C_2$  и джокер  $J_2$  разделяют общую область  $x < \hat{D}_{x,\min}$  (при этом, оговаривается, какое из русел в данный момент считается действующим). В уравнения (2), (3), (5), (6) и (7) вместо неизвестных истинных значений параметров подставляются их оценки.



**Рис. 1. Система русел и джокеров**

Прямой штриховкой обозначены совпадающие области русел  $C_1$  и  $C_2$  и джокера  $J_2$ . Косой штриховкой обозначена область джокера  $J_1$ .  $\blacktriangle$  – значения  $x_n$  в процессе роста пика.  $\blacksquare$  – точка срабатывания джокера  $J_2$ .  $\blacktriangledown$  – значения  $x_n$  в процессе спада пика.

Данная схема представляет собой, в определённом смысле, дальнейшее развитие схемы, предложенной в [5]. Следует отметить, что, в отличие от предлагавшихся ранее схем, наибольшую часть времени изображающая точка проводит не в области русел, а в области джокера.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белайчук Л.В., Малинецкий Г.Г. Прodelки джокеров на одномерных отображениях // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 1997. Препринт № 24.
2. Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
3. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.
4. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — М.: УРСС, 2002.
5. Зульпукаров М.-Г.М., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. Метод русел и джокеров на примере исследования системы Розенцвейга-Макартура // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2006. Препринт № 21.

## A SYSTEM WITH HARD TURBULENCE RECONSTRUCTION USING CHANNELS AND JOKERS METHOD

**Zulpukarov M.-G.M., Malinetskii G.G., Podlazov A.V.**

(Russia, Moscow)

*A construction of a simple system showing the hard turbulence analogous to the one in the Ershov mapping, is discussed. An example of application of the channels and jokers method, the one combining deterministic and probabilistic methods of system behaviour description, is considered.*