ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Лискина Е. Ю.

В работе исследуется автономная нелинейная система дифференциальных уравнений второго порядка, матрица линейного приближения которой имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть может быть представлена в виде суммы форм порядка, не ниже второго относительно компонент фазового вектора. Получены достаточные условия существования центра в окрестности нулевого решения

Введение. Исследование проблемы различения центра и фокуса у автономных нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка с чисто мнимыми собственными значениями матрицы линейного приближения требует привлечения нелинейных членов правой части [1, 2]. Методы её решения предложены в [1–4], но до настоящего времени проблема является актуальной.

В данной работе для различения центра и фокуса используется метод введения вспомогательного параметра [5–7]. Отличие состоит в том, что параметр вводится не только по фазовым переменным, но и по времени. Получены достаточные условия существования окрестности нулевого состояния равновесия, через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение, период которого зависит от периода решений системы линейного приближения и начальных значений фазовых переменных, тогда как в [7], период является постоянным (совпадает с периодом решений системы линейного приближения).

Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + f\left(x\right), \tag{1}$$

в которой $x \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ – двумерное вещественное векторное пространство, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$ – матрица, имеющая пару собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ ($\omega = \sqrt{bc - a^2}$, $a^2 < bc$, $bc > 0$, [5]); $f\left(x\right)$ – вектор-функция, компонентами которой являются формы порядка $k \geq 2$ относительно компонент вектора x, $k \in \mathbb{N}$, $\left\|x\right\| = \max\limits_{i=1,2}\left\{\left|x_i\right|\right\}$. Система (1) на множестве $\Omega\left(\varepsilon_0\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2, \left\|x\right\| \leq \varepsilon_0\right\}$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Требуется получить условия существования окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$, через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение системы (1), то есть условия того, что состояние равновесия $x \equiv 0$ является центром системы (1).

Преобразование системы (1). Выполним замену переменных $t=(1+\lambda)\overline{t}$, $x=(E+M)\overline{x}$, где λ – непрерывное выражение-параметр, $t=\overline{t}$ при $\lambda=0$, $M=(m_{ij})$ – матрица параметров размерности 2×2, непрерывная по свом компонентам, $M(0)=0$, E – единичная матрица. Пусть норма матрицы $\|M\|=\max\limits_{i=1,2}\{|m_{i1}|+|m_{i2}|\}$, тогда в силу [8] матричный ряд $(E+M)^{-1}=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i$ равномерно сходится на множестве $W(\delta_1)=\left\{m_{ij}:|m_{ij}|\le\delta_1\ \left(i,j=\overline{1,2}\right)\Rightarrow\|M\|<1\right\}$. С учетом сказанного при сохранении прежних обозначений для переменных t и x систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+\left(\lambda A+(AM-MA)+\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i\left(M^iA-M^{i-1}AM\right)\right)x+\\&+(1+\lambda)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i f\left((E+M)x\right).\end{aligned}\tag{2}$$

Определим множество $U(\delta)=\left\{\alpha\in\mathbb{R}^2,\|\alpha\|\le\delta\right\}$, $\|\alpha\|=\max\left\{|\alpha_1|,|\alpha_2|\right\}$. Состояние равновесия $x\equiv 0$ является решением системы (2). Для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta_0\in\left(0,\min\{\varepsilon_0,\delta_1\}\right)$, что для любого вектора $\alpha\in U(\delta_0)$, любого выражения λ, $|\lambda|\le\delta_0$, и любой матрицы параметров M, элементы которой принадлежат множеству $W(\delta_0)$, решение $x(t,\alpha,\lambda,M)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0,\alpha,\lambda,M)=\alpha$, определено и непрерывно на промежутке $[0,T_0]$ ($T_0=2\pi/\omega$), и при любых $t\in[0;T_0]$ удовлетворяет неравенству $\|x(t,\alpha,\lambda,M)\|<\varepsilon$.

Аналогично [6] доказано, что решение $x(t,\alpha,\lambda,M)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $x(0,\alpha,\lambda,M)=\alpha$, можно представить в виде $x(t,\alpha,\lambda,M)=\left(X(t)+\Phi(t,\alpha,\lambda,M)\right)\alpha$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица соответствующей линейной системы $\dot{x}=Ax$, удовлетворяющая условию $X(0)=E$, матрица $\Phi(t,\alpha,\lambda,M)$ непрерывна по переменным t, x, компоненте λ и компонентам матрицы M на множестве $[0;T]\times U(\delta_0)\times[-\delta_0;\delta_0]\times W(\delta_0)$; $\Phi(0,\alpha,\lambda,M)=0$; $\Phi(t,\alpha,\lambda,M)\to 0$ при $\alpha\to 0$, $\lambda\to 0$, $\|M\|\to 0$ равномерно по $t\in[0;T_0]$. Обозначим $\overline{F}\left((E+M)X(t)\alpha\right)$ – матрицу, элементами которой являются формы порядка $(k-1)$ относительно компонент вектора $X(t)\alpha$, $\psi(\alpha,\lambda,M)$ – выражение, в которое входят слагаемые, содержащие матрицу $\Phi(t,\alpha,\lambda,M)$. Тогда условие существования ненулевого T_0-периодического решения системы (2) (соответственно ненулевого T-периодического решения системы (1), $T=(1+\lambda)T_0$) будет иметь вид:

$$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)\lambda AX(t)\alpha dt+\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)(AM-MA)X(t)\alpha dt+$$
$$+\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)\sum_{i=2}^{+\infty}(-1)^i\left(M^iA-M^{i-1}AM\right)X(t)\alpha dt+ \tag{3}$$
$$+\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i\overline{F}\left((E+M)X(t)\alpha\right)X(t)\alpha dt+\psi(\alpha,\lambda,M)=0.$$

Преобразование системы (3). Непосредственным вычислением устанавливаем, что:

1) фундаментальная матрица соответствующей линейной системы $\dot{x}=Ax$, удовлетворяющая условию $X(0)=E$, имеет вид $X(t)=\begin{pmatrix}\cos\omega t+\frac{a}{\omega}\sin\omega t & \frac{b}{\omega}\sin\omega t\\ -\frac{c}{\omega}\sin\omega t & \cos\omega t-\frac{a}{\omega}\sin\omega t\end{pmatrix}$;

2) для рассматриваемой матрицы A и любой матрицы M справедливо
$\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)(AM-MA)X(t)\alpha dt\equiv 0$;

3) если $T_0=2\pi/\omega$, то при s или q нечетном $\int_0^{T_0}\sin^s\omega t\cos^q\omega t dt\equiv 0$, а при s и q четных $\int_0^{T_0}\sin^s\omega t\cos^q\omega t dt\neq 0$;

4) справедливо представление $\overline{F}\left((E+M)X(t)\alpha\right)=F_1\left(X(t)\alpha\right)+F_2\left(MX(t)\alpha\right)$, в котором матрица $F_1\left(X(t)\alpha\right)$ содержит формы порядка $(k-1)$ относительно компонент вектора $X(t)\alpha$, матрица $F_2\left(MX(t)\alpha\right)$ содержит формы порядка $(k-1)$ относительно компонент вектора $MX(t)\alpha$.

Лемма. Пусть в системе (1) $f(x)$ – вектор-функция, компонентами которой являются формы порядка $k\geq 2$ относительно компонент вектора x. Если k – четное, то в формуле (3) $\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i\overline{F}\left((E+M)X(t)\alpha\right)X(t)\alpha dt\equiv 0$. Если k – нечетное, то в формуле (3) $\int_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i\overline{F}\left((E+M)X(t)\alpha\right)X(t)\alpha dt\neq 0$.

Доказательство. В силу вида матрицы $X(t)$ в компоненты вектора $X(t)\alpha$ входят функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Тогда непосредственным вычислением устанавливаем, что в формуле (4) компоненты матрицы $X^{-1}(t)\overline{F}\left((E+M)X(t)\alpha\right)X(t)$ содержат слагаемые вида $\sin^s\omega t\cos^q\omega t$, где $s+q=k+1$. Тогда при k четном число $k+1=s+q$ является нечетным, следовательно, хотя бы одно из чисел s или q нечетное и $\int\limits_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i \bar{F}\big((E+M)X(t)\alpha\big)X(t)\alpha dt \equiv 0$. Аналогично при k – нечетном $\int\limits_0^{T_0} X^{-1}(t)(1+\lambda)\sum\limits_{i=0}^{+\infty}(-1)^i M^i \bar{F}\big((E+M)X(t)\alpha\big)X(t)\alpha dt \neq 0$. Лемма доказана.

Будем полагать, что элементы матрицы M являются формами порядка l относительно компонент вектора $\mu \in \mathbb{R}^m$, $l \in \mathbb{N}$, $\mu \in V(\delta_0)$, множество $V(\delta_0)$ определено соотношением $V(\delta_0) = \left\{\mu \in \mathbb{R}^m : \|\mu\|^{2l} \le \delta_0 \Rightarrow \|M\| < 1\right\}$, $\|\mu\| = \max\limits_{i=1,m}\{|\mu_i|\}$, $\lambda = \nu^{2l}$, $|\nu|^{2l} \le \delta_0$, тогда система (3) примет вид:

$$s_k(\alpha, \nu, \mu) + o(\rho^k) = 0. \tag{4}$$

в котором $s_k(\alpha, \nu, \mu)$ – форма порядка k по совокупности компонент переменных α, ν, μ; $\lim\limits_{\rho\to 0} o(\rho^k)/\rho^k = 0$. При этом, в силу доказанной леммы, если $k = 2l$, то $s_k(\alpha, \nu, \mu) = \int\limits_0^{T_0} X^{-1}(t)\Big(\nu^{k-1}A + \big(M^2A - MAM\big)\Big)X(t)\alpha dt$, если же $k = 2l+1$, то

$$s_k(\alpha, \nu, \mu) = \int\limits_0^{T_0} X^{-1}(t)\Big(\nu^{k-1}A + \big(M^2A - MAM\big) + F_1\big(X(t)\alpha\big)\Big)X(t)\alpha dt.$$

Обозначим $\rho = \max\{\|\alpha\|, |\lambda|, \|\mu\|\}$, $\zeta = (\alpha/\rho, \nu/\rho, \mu/\rho)$, $\|\zeta\| = 1$, $\mathrm{O}(\rho) = o(\rho^k)/\rho^k$, $\lim\limits_{\rho\to 0} O(\rho) = 0$, с учетом которых систему (4) можно записать так: $\tilde{s}_k(\zeta) + O(\rho) = 0$.

Теорема 1. Если при любом $\zeta \in \mathbb{R}^{m+3}$, $\|\zeta\| = 1$, выполнено неравенство $\tilde{s}_k(\zeta) \neq 0$, то существует такое число $\delta' \in (0, \delta_0)$, что для любых векторов $\alpha \in U(\delta')$, $\mu \in V(\delta')$ и любого числа ν такого, что $|\nu|^{k-1} \le \delta'$, система (2) не имеет ненулевых T_0-периодических решений.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 в [5].

Пусть выполняется условие.

I. Существует такое число $\delta' \in (0, \delta_0)$, что для любых векторов $\alpha \in U(\delta') \setminus \{0\}$, $\mu \in V(\delta')$ и любого числа ν такого, что $|\nu|^{k-1} \le \delta'$, существует хотя бы одна из зависимостей: $\alpha(\nu, \mu)$ ($\alpha(\nu, \mu) \neq 0$ при $\mu \neq 0$), $\nu(\alpha, \mu)$, $\mu(\alpha, \nu)$, – такая, что выполняется одно из равенств $s_k(\alpha(\nu, \mu), \nu, \mu) = 0$, $s_k(\alpha, \nu(\alpha, \mu), \mu) = 0$, $s_k(\alpha, \nu, \mu(\nu, \mu)) = 0$.

Введём обозначения: $K(\delta') = \big(U(\delta') \setminus \{0\}\big) \times [-\delta', \delta'] \times V(\delta')$ – множество векторов (α, ν, μ), удовлетворяющих условию I; Z_0 – множество, определённое условием $Z_0 = \left\{\zeta_0 \in \mathbb{R}^{m+3} : \|\zeta_0\| = 1, (\alpha, \nu, \mu) \in K(\delta') \Rightarrow \zeta_0 = (\alpha/\rho, \nu/\rho, \mu/\rho) \in Z_0\right\}$; $D\tilde{s}_k(\zeta_0)$ – матрица Якоби функции $\tilde{s}_k(\zeta)$ размерности $2\times(m+3)$, вычисленная при $\zeta=\zeta_0$.

Результаты. В следующей теореме установлены достаточные условия существования окрестности нулевого состояния равновесия, через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение, период которого зависит от периода решений системы линейного приближения и начальных значений фазовых переменных.

Теорема 2. Если выполняется условие I, и для любого вектора $\zeta_0\in Z_0$ справедливо равенство $\operatorname{rank} D\tilde{s}_k(\zeta_0)=2$, тогда для любого вектора $\zeta_0\in Z_0$ существует такое число $\delta>0$, что на множестве $S_{\zeta_0}(\delta)=\left\{\zeta\in\mathbb{R}^{m+3}:\|\zeta-\zeta_0\|<\delta\right\}$ система (2) имеет семейство ненулевых T_0-периодических решений $\overline{x}(\overline{t},\alpha,\nu,\mu)$, удовлетворяющих начальным условиям $\overline{x}(0,\alpha,\nu,\mu)=\alpha$. Начальные значения $\alpha\in U(\delta')\setminus\{0\}$ решений семейства определяются соотношениями $(\alpha,\nu,\mu)=\rho(\zeta_0+\Delta\zeta)$, $(\zeta_0+\Delta\zeta)\in S_{\zeta_0}(\delta)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы в [7] для каждого произвольного, но фиксированного вектора $\zeta_0\in Z_0$. В силу произвольности вектора $\zeta_0\in Z_0$ получаем, что существует окрестность состояния равновесия $x\equiv 0$ системы (2), через каждую точку которой проходит ненулевое T_0-периодическое решение $\overline{x}(\overline{t},\alpha,\nu,\mu)$ с начальными условиями $\overline{x}(0,\alpha,\nu,\mu)=\alpha$, $\alpha\in U(\delta')\setminus\{0\}$.

Замечание. Подставляя выражение $t=(1+\lambda)\overline{t}$ в решение $\overline{x}(\overline{t},\alpha,\nu,\mu)$ системы (2), а решение $\overline{x}(\overline{t},\alpha,\nu,\mu)$ в выражение $x=(E+M)\overline{x}$, получим, что существует окрестность состояния равновесия $x\equiv 0$ системы (1), через каждую точку которой проходит ненулевое T-периодическое решение системы (1) $x(t,\alpha)=x(t,\alpha(\nu,\mu))$ с начальными условиями $x(0,\alpha(\nu,\mu))=\alpha(\nu,\mu)$, $T=(1+\lambda)T_0$, $\alpha\in U(\delta')\setminus\{0\}$, $\lambda=\nu^{2l}$. В силу существования хотя бы одной из зависимостей: $\alpha(\nu,\mu)$ ($\alpha(\nu,\mu)\neq 0$ при $\mu\neq 0$), $\nu(\alpha,\mu)$, $\mu(\alpha,\nu)$, – период T системы (1) зависит от начальных значений $\alpha\in U(\delta')\setminus\{0\}$.

Пример. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-cx_1-dx_1^3.\end{cases}\tag{5}$$

Система (5) имеет вид (1), в котором $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&1\\-c&0\end{pmatrix}$, $f(x)=\begin{pmatrix}0\\-dx_1^3\end{pmatrix}$, $c>0$, $d>0$. Тогда $\omega=\sqrt{c}$, $X(t)=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{c}t & \frac{1}{\sqrt{c}}\sin\sqrt{c}t\\ -\sqrt{c}\sin\sqrt{c}t & \cos\sqrt{c}t\end{pmatrix}$. Выполним замену переменных $t=(1+\lambda)\overline{t}$, $x=(E+M)\overline{x}$, где $M=(m_{ij})$, m_{ij} – линейные формы относительно компонент вектора $\mu\in\mathbb{R}^m$ ($i,j=\overline{1;2}$). Положим $m_{ij}=\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1;2}$), $\lambda=\nu^2$ ($\nu\in\mathbb{R}$).

Проводя изложенные рассуждения, получим явный вид вектор-функции $s_k(\alpha, \nu, \mu)$:

$$s_3(\alpha,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} \dfrac{\pi\alpha_2}{4\sqrt{c}^5}\left(8c^2\lambda^2+4c(c+1)^2\mu^2-3c\alpha_1^2-3\alpha_2^2\right) \\ \dfrac{\pi\alpha_1}{4\sqrt{c}^3}\left(8c^2\lambda^2+4c(c+1)^2\mu^2-3c\alpha_1^2-3\alpha_2^2\right) \end{pmatrix}.$$

Система уравнений $s_3(\alpha,\lambda,\mu)=0$ имеет бесконечное множество вещественных решений вида

$$\begin{cases} (\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \quad |\mu|\in\left[0, \sqrt{\dfrac{3\left(c\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)}{4c(c+1)^2}}\right], \\ \nu^2=\dfrac{3\left(c\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)-4c(c+1)^2\mu}{8c^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Выберем числа $\delta_{01}\in(0;0,5)$ и $\delta_0\in\left(0;\min\left\{\delta_{01},\sqrt{3\left(c\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\Big/\left(4c(c+1)^2\right)}\right\}\right]$, тогда для любого числа μ такого, что $|\mu|\le\delta_0$, выполняется неравенство $\|M\|<1$. Соотношения (6) задают зависимость $\nu(\alpha,\mu)$. Выберем вектор $\alpha\in U(\delta_0)\setminus\{0\}$ и число $\mu\in[0;\delta_0]$, вычислим $\nu^2=\left(3\left(c\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)-4c(c+1)^2\mu\right)\Big/\left(8c^2\right)$, $\rho=\max\{|\alpha_1|,|\alpha_1|,|\nu|,|\mu|\}$, $\delta'=\min\left\{\delta_0,\left(3(c+1)\delta_0^2-4c(c+1)^2\delta_0\right)\Big/\left(8c^2\right)\right\}$, получим вектор $\zeta=(\alpha/\rho,\nu/\rho,\mu/\rho)$ и матрицу Якоби $D\tilde{s}_k(\zeta_0)$:

$$D\tilde{s}_k(\zeta_0)=\begin{pmatrix} -\dfrac{3\pi\alpha_1\alpha_2}{2\sqrt{c}^3} & -\dfrac{3\pi\alpha_1^2}{2\sqrt{c}^3} & \dfrac{2\pi\alpha_2}{c}\sqrt{\dfrac{3\left(c\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)-4c(c+1)^2\mu}{2c}} & \dfrac{2\pi(c+1)^2\mu\alpha_2}{\sqrt{c}^3} \\ -\dfrac{3\pi\alpha_2^2}{2\sqrt{c}^3} & -\dfrac{3\pi\alpha_1\alpha_2}{2\sqrt{c}^3} & 2\pi\alpha_1\sqrt{\dfrac{3\left(c\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)-4c(c+1)^2\mu}{2c}} & \dfrac{2\pi(c+1)^2\mu\alpha_1}{\sqrt{c}^3} \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} D\tilde{s}_k(\zeta_0)=2$, то система (5) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 на множестве $K(\delta')=\left(U(\delta')\setminus\{0\}\right)\times[-\delta',\delta']\times[-\delta',\delta']$ и, следовательно, имеет окрестность состояния равновесия $x\equiv 0$, через каждую точку которой проходит ненулевое T-периодическое решение, имеющее период $T=2\pi\left(1+\nu^2\right)\Big/\sqrt{c}$.

Исследуем систему (5) другим способом [2]. После замены переменных $x_1=r\cos\sqrt{c}\varphi$, $x_2=r\sqrt{c}\sin\sqrt{c}\varphi$ и исключения переменной t система (5) может быть преобразована к виду

$$\frac{dr}{d\varphi}=r\sqrt{c}\,\frac{r^2d\cos^3\sqrt{c}\varphi\sin\sqrt{c}\varphi}{1+r^2d\cos^4\sqrt{c}\varphi}. \tag{7}$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы для любого $r \in [0; \delta]$ и всех $\varphi \in \left[0; 2\pi/\sqrt{c}\right]$ выполнялось неравенство $r^2 d\cos^4\sqrt{c}\varphi < 1$. Тогда правая часть уравнения (7) является аналитической по переменным r и φ на множестве $[0;\delta]\times\left[0; 2\pi/\sqrt{c}\right]$. Выберем число $\delta_0 \in \left(0, \min\{\delta, 1/d\}\right)$ таким образом, чтобы для любого числа $r_0 \in (0;\delta_0]$ всех $\varphi \in \left[0; 2\pi/\sqrt{c}\right]$ выполнялось неравенство $\left(r(\varphi, r_0)\right)^2 d\cos^4\sqrt{c}\varphi < 1$. Вместе с уравнением (7) рассмотрим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{c}\,\frac{\left(\overline{r}(\varphi, r_0)\right)^2 d\cos^3\sqrt{c}\varphi\sin\sqrt{c}\varphi}{1+\left(\overline{r}(\varphi, r_0)\right)^2 d\cos^4\sqrt{c}\varphi}, \tag{8}$$

в котором $\overline{r}(\varphi, r_0)$ – решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $\overline{r}(0, r_0) = r_0$, $r_0 \in (0;\delta_0]$. В силу того, что решение $\overline{r}(\varphi, r_0)$, удовлетворяющее начальному условию $\overline{r}(0, r_0) = r_0$, является решением линейного однородного дифференциального уравнения (8), то при всех $(r_0, \varphi) \in (0;\delta_0]\times\left[0; 2\pi/\sqrt{c}\right]$ справедливо представление $\overline{r}(\varphi, r_0) = r_0 + o(r_0)$. Тогда уравнение (8) на множестве $(0;\delta_0]\times\left[0; 2\pi/\sqrt{c}\right]$ можно переписать следующим образом:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\sqrt{c}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n d^{n+1}\left(r_0 + o(r_0)\right)^{2n+2}\cos^{4n+3}\sqrt{c}\varphi\sin\sqrt{c}\varphi. \tag{9}$$

В силу выбора числа $\delta_0 \in \left(0, \min\{\delta, 1/d\}\right)$ ряд в правой части уравнения (9) сходится абсолютно и равномерно при всех $(r_0, \varphi) \in [0;\delta_0]\times\left[0; 2\pi/\sqrt{c}\right]$ [9]. Условие существования ненулевого $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$-периодического решения $r(\varphi, r_0)$ уравнения (9), удовлетворяющего начальному $r(0, r_0) = r_0$, имеет вид:

$$\int_0^{2\pi/\sqrt{c}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n d^{n+1}\left(r_0 + o(r_0)\right)^{2n+2}\cos^{4n+3}\sqrt{c}\varphi\sin\sqrt{c}\varphi\right)d\varphi = 0. \tag{10}$$

Используя равномерную сходимость подынтегрального выражения, непосредственными вычислениями устанавливаем, что равенство (10) выполняется при всех $r_0 \in (0;\delta_0]$. Следовательно [1, 2], существует окрестность состояния равновесия $x \equiv 0$ системы (5), через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
2. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических

систем на плоскости. М: Наука, 1976.
3. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
4. *Амелькин В.В., Лукашевич Л.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск: Изд-во БГУ, 1982.
5. *Лискина Е.Ю.* О достаточных условиях существования центра нелинейной динамической системы второго порядка // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2007. № 12. С. 32–38.
6. *Лискина Е.Ю.* О существовании периодических решений нелинейной системы дифференциальных уравнений // Сборник научных трудов «Математика. Компьютер. Образование» / Под редакцией Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2000. Вып. 7. Ч. II. С. 460–465.
7. *Лискина Е.Ю.* Задача о нахождении числа семейств малых периодических решений неавтономной системы дифференциальных уравнений // Сборник научных трудов «Математика. Компьютер. Образование» Вып. 11. Ч. II. / Под редакцией Г.Ю. Ризниченко. М.: Прогресс-Традиция, 2004. С. 474–480.
8. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
9. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический анализ. Ч. 2. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR EXISTENCE OF THE CENTER IN SECOND ORDER NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM

Liskina E. Y.

In this paper the autonomous non-linear system of the differential equations of the second order is researched. The matrix of linear approximation of this system has a pair of imaginary eigenvalues. The non-linear part of this system can be represented as the sum of the forms of the component of a phase vector. The order of the forms is not less than 2. The sufficient conditions of existence of the center in a neighbourhood of zero solution are received