

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УЗЛЫ И МНОГОГРАННИКИ

Анюшина Е. И.

При рассмотрении многогранников естественным образом возникает d -диаграмма узла. По d -диаграмме узел восстанавливается однозначно. Таким образом, многограннику соответствует узел, а d -диаграмме – многогранник. В работе рассматривается метод построения многогранников, соответствующих рациональным узлам

В теории узлов особую роль играют так называемые *рациональные узлы*. Они введены Л. Кауффманом и подробно рассмотрены в источнике [4]. Их определение дадим в удобной для нас форме, используя понятие «плеть» [3].

Плетью называется граф $R(m)$, изображенный на рисунке 1, с четырьмя вершинами валентности один и m вершинами валентности четыре; при этом на каждой вершине валентности четыре определено отношение «проход-переход». На рисунке 1 изображена плеть, расположенная горизонтально, поворот рисунка на 90 градусов против часовой стрелки дает плеть, расположенную вертикально. Отношение «проход-переход» отмечено на рисунке 1 разрывом линии.

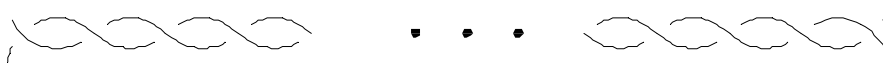


Рис.1. Плеть

Два четырехвалентных графа A, B с четырьмя одновалентными вершинами можно объединить в более сложный объект C , представляющий собой четырехвалентный граф с четырьмя одновалентными вершинами. Для этого в графах A, B выбирается по две одновалентных вершины и рассматриваются выходящие из них ребра. Выбранные два ребра из A соединяются с двумя выбранными ребрами из B (в предписанном порядке) так, что возникает новый граф C , вершинами и ребрами которого являются вершины и ребра графов A, B , за исключением выбранных двух пар ребер, замененных на два ребра указанным выше соединением. Всякий четырехвалентный граф с четырьмя одновалентными вершинами можно трансформировать в четырехвалентный граф без одновалентных вершин, если попарно (в предписанном порядке) соединить ребра с одновалентными вершинами. Такая операция называется замыканием. При этом (в случае, если четырехвалентные вершины были снабжены структурой «проход-переход») получается диаграмма узла (или зацепления).

Рациональные узлы определяются как узлы, диаграммы которых получаются из горизонтальных и вертикальных плетей указанным выше способом. Более точно построение рационального узла происходит индуктивно, шаг за шагом. В построении используются плети $R(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Рациональные узлы будем обозначать $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$, где n_i , $i = 1, 2, 3, \dots, k$ – плеть, с определенным количеством перекрестков.

Началом индукции является горизонтальная плеть. На i -ом шаге к построенному четырехвалентному графу с четырьмя одновалентными вершинами A присоединяется плеть $R(n_{i+1})$ – горизонтальная, если i нечетное и вертикальная, если i четное. Одновалентные вершины графа A предполагаются расположенными в северо-восточной, северо-западной, юго-западной и юго-восточной части диаграммы. Это же соглашение имеет место и в отношении плетей – горизонтальных и вертикальных. На i -ом шаге индукции предписанное правило соединения ребер заключается в следующем. При нечетном i соединяются юго-восточное ребро графа A с северо-восточным ребром присоединяемой плети и юго-западное ребро графа A с северо-западным ребром присоединяемой плети. При четном i соединяются северо-западное ребро графа A с северо-восточным ребром присоединяемой плети и юго-западное ребро графа A с юго-восточным ребром присоединяемой плети.

Вышеприведенное предписание соединений ребер можно описать также следующим образом. На каждом шаге индукции плеть располагается под диаграммой графа A , если i четное или слева от диаграммы графа A , если i нечетное. Затем соединяются две пары ближайших друг к другу ребер.

После выполнения $(k-1)$ -ой операции присоединения плети полученный четырехвалентный граф с четырьмя одновалентными вершинами замыкают, то есть соединяют между собой попарно четыре ребра инцидентных одновалентным вершинам. При k нечетном соединяются северо-западная вершина с северо-восточной и юго-западная с юго-восточной, а при k четном – северо-западная с юго-западной и северо-восточная с юго-восточной. На рисунке 2 изображены диаграммы рациональных узлов.

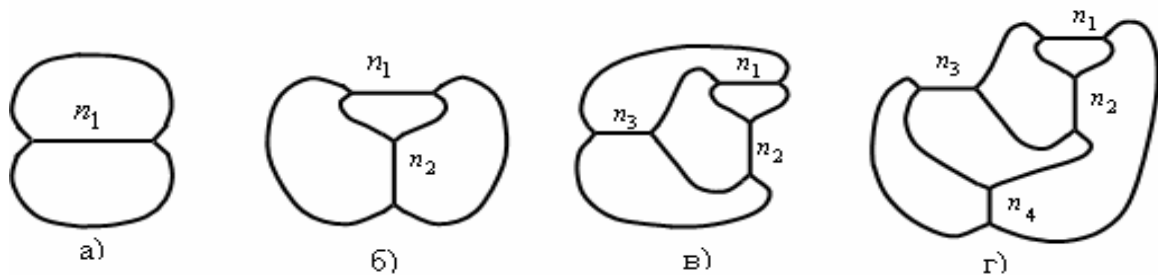


Рис. 2. Диаграмма рациональных узлов: а) узел вида $R(n_1)$; б) узел вида $R(n_1, n_2)$; в) узел вида $R(n_1, n_2, n_3)$; г) узел вида $R(n_1, n_2, n_3, n_4)$

Из рисунка видно, что каждый рациональный узел следующего шага получается из предыдущего добавлением вертикальной или горизонтальной плети. Здесь горизонтальная и вертикальные плети условно изображены в виде, показанном на рисунке 3.

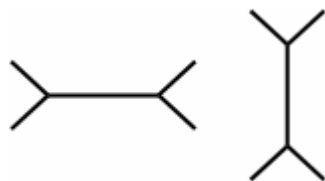


Рис. 3. Условное изображение плети

Известно, что существует особый способ кодирования узлов – d -диаграммы, которые представляют собой окружность на плоскости вместе с двумя семействами хорд, причем хорды каждого из этих двух семейств между собой не пересекаются. По d -диаграмме узел восстанавливается однозначно. Связь узлов и d -диаграмм описана в [2].

d -диаграммы простейших рациональных узлов вида $R(1,1,1,\dots,1)$ (количество единиц равно k) или R_k , где k – количество хорд в d -диаграмме узла [1], представляют собой d -диаграммы, в которых первая хорда пересекается только со второй, вторая – только с третьей и первой, третья – со второй и четвертой, и так далее, то есть каждая i -ая хорда пересекается $(i+1)$ -ой и $(i-1)$ -ой, а последняя k -ая хорда пересекается только с $(k-1)$ -ой. На рисунке 4 показана d -диаграмма рационального узла R_6 , в которой всего 6 хорд ($k=6$).

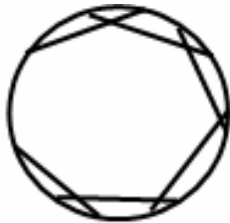


Рис. 4. d -диаграмма рационального узла

d -диаграммы рациональных узлов вида $R(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ связаны с d -диаграммами узлов $R(1,1,\dots,1)$. Они представляют собой d -диаграммы рациональных узлов R_k , в которых к каждой хорде c_i d -диаграммы узла $R(1,1,\dots,1)$ с номером i добавляется $n_i - 1$ малых хорд, пересекающих ее в малой окрестности ее конца (все равно какого) (см. [3]). Другими словами, i -ая хорда диаграммы R_k заменяется на набор из n_i хорд, из которых первая совпадает с c_i , а остальные $n_i - 1$ хорд параллельны друг другу, пересекают исходную хорду и имеют концы в малой окрестности конца хорды c_i (настолько малой окрестности, что она не содержит никаких концов хорд рассматриваемой диаграммы).

d -диаграммы естественным образом возникают при рассмотрении многогранников.

Рассмотрим многогранник, у которого в каждой вершине сходятся три ребра (например, куб, призмы, усеченные призмы, додекаэдр и др.). Его можно рассматривать как граф, каждая вершина которого инцидентна трем ребрам (трехвалентный граф). Гамильтоновым циклом на трехвалентном графе называется замкнутый путь, состоящий из ребер графа и проходящий через каждую вершину графа (но не через каждое ребро) ровно один раз.

Пусть имеется многогранник с гамильтоновым циклом. Гамильтонов цикл на многограннике определяет d -диаграмму. Таким образом, для того, чтобы построить d -диаграмму по заданному многограннику, необходимо построить для него гамильтонов цикл, то есть совершить обход так, как описано выше. В результате получаем, что некоторые не пройденные во время обхода ребра лежат внутри, а некоторые вне «окружности», которая представляет собой гамильтонов путь. То есть, после совершения об-

хода все ребра разделились на внутренние и на внешние. Эти ребра и являются хордами в d -диаграмме. Пронумеруем концы хорд (в соответствии с обходом).

Нарисуем окружность, отметим на ней то количество точек, которое совпадает с количеством вершин многогранника. Затем соединим точки, соответствующие концам хорд. Тем самым получим диаграмму, которая представляет собой окружность на плоскости вместе с двумя семействами хорд, хорды каждого семейства между собой не пересекаются [2], то есть d -диаграмму.

Если есть d -диаграмма, то есть и узел. Таким образом, многограннику соответствует узел, а d -диаграмме соответствует многогранник. Это соответствие устроено так: построим d -диаграмму не на плоскости, а на сфере. Хорды одного семейства строим в северном полушарии, а хорды другого семейства строим в южном полушарии. При этом сфера разделяется на многоугольные области. Можно перейти от сферы с областями к многограннику с плоскими гранями.

Для иллюстрации вышеизложенного можно проделать ряд простых упражнений, например: построить d -диаграммы, соответствующие кубу, призме, додекаэдру.

Цель данной работы состоит в следующем: построить многогранники, соответствующие рациональным узлам, которые задаются d -диаграммами.

Для достижения поставленной цели необходимо ответить на следующие вопросы:

- 1) какому многограннику соответствует d -диаграмма R_k ?
- 2) как связаны многогранники двух d -диаграмм, одна из которых получается из другой дополнительной хордой, пересекающей некоторую хорду первой диаграммы?
- 3) как связаны многогранники двух d -диаграмм, одна из которых получается из другой многократным пересечением одной из хорд в малой окрестности ее конца?

Начальной d -диаграмме рационального узла (R_3) соответствует многогранник, в основании которого лежит четырехугольник. Этот многогранник получается из четырехугольной призмы, через два ребра которой проведено сечение так, как показано на рисунке 5 а. Другими словами, многогранник ($ABCDEF$), соответствующий рациональному узлу R_3 , получается из четырехугольной призмы «спаиванием» верхнего и нижнего ребер (рис. 5 б). Это легко проверить, достаточно построить гамильтонов цикл для этого многогранника, а затем d -диаграмму.

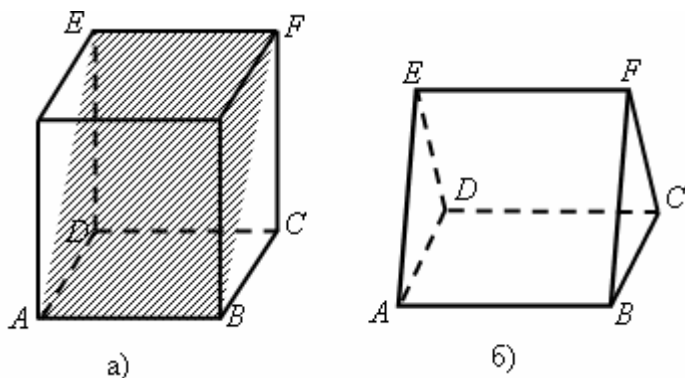


Рис. 5. Многогранник, соответствующий рациональному узлу R_3

Спроецируем многогранник на его нижнее основание (рис. 6 а). Построим гамильтонов путь, как показано на рисунке 6 б. Во время совершения обхода пронумеруем все вершины многогранника. Далее на окружности отметим точки и соединим те, которые соответствуют хордам (то есть 1 и 3, 2 и 5, 4 и 6).

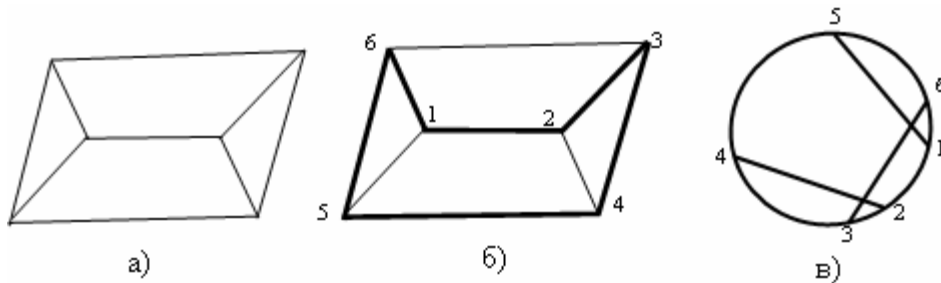


Рис. 6. Построение: а) проекция многогранника $ABCDEF$; б) гамильтонов цикл; в) d -диаграмма R_3

Прежде, чем ответить на второй вопрос рассмотрим следующую задачу. Пусть дана d -диаграмма D и соответствующий ей многогранник M с гамильтоновым циклом.

Рассмотрим d -диаграмму D_1 , полученную из D пересечением хорды Y d -диаграммы D с помощью малой хорды m . Каков будет многогранник M_1 , соответствующий D_1 ?

Для решения поставленной задачи разделим ребра многогранника M на две группы – «толстые» и «тонкие». Из «толстых» ребер состоит гамильтонов путь, а «тонкие» – соответствуют хордам d -диаграммы.

Рассмотрим хорду Y . Ей соответствует ребро в многограннике M . Малая хорда m определяет один из концов хорды Y и вершину X многогранника M . В этой вершине сходятся три ребра – одно «тонкое» и два «толстых». Отсечем от многогранника M малую треугольную пирамиду с вершиной в точке X .

Многогранник M_1 представляет собой многогранник M с отсеченной пирамидой. Гамильтонов путь в M_1 совпадает с гамильтоновым путем в M (в неотсеченной его части) и вдобавок к этому из двух сторон треугольника (основания отсеченной пирамиды), а именно тех сторон, которые соприкасаются с ребром Y . При этом третья сторона треугольника будет тонким ребром (она соответствует малой хорде m).

Для ответа на второй вопрос необходимо построить многогранник, соответствующий d -диаграмме рационального узла, которая получается из R_3 пересечением крайней ее хорды дополнительной малой хордой, если задан многогранник, соответствующий d -диаграмме R_3 . Затем многогранник для R_5 , если задан многогранник R_4 , и так далее. В итоге нужно построить многогранник, соответствующий d -диаграмме R_k .

Итак, нам требуется построить многогранник M_1 для R_4 .

В этом случае многогранник M нам известен – это многогранник $ABCDEF$. Рассмотрим d -диаграмму R_3 . Необходимо определить, какое ребро в многограннике задает хорду Y , которую мы хотим пересечь.

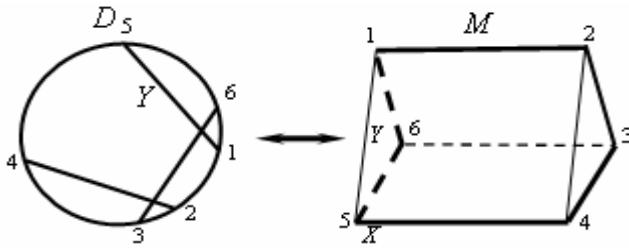


Рис. 7. d -диаграмма R_3 и соответствующий ей многогранник

Это определяется, исходя из нумерации вершин многогранника в соответствии с гамильтоновым путем (хорда Y будет «тонкое» ребро, а гамильтонов путь состоит из «толстых»). Обозначим хорду с номерами 1-5 через Y . В многограннике M ей соответствует ребро с теми же номерами (обозначим ребро также Y) (рис. 7). Пересечем хорду Y малой хордой m . Перенумеруем в полученной d -диаграмме концы хорд. Тем самым хорде Y присваиваются номера 1-6. Отсечем от призмы M пирамиду с вершиной X (вершина под номером 5 на рис.7), в которой сходятся три ребра: Y и еще два ребра, составляющие гамильтонов путь (два «толстых» ребра).

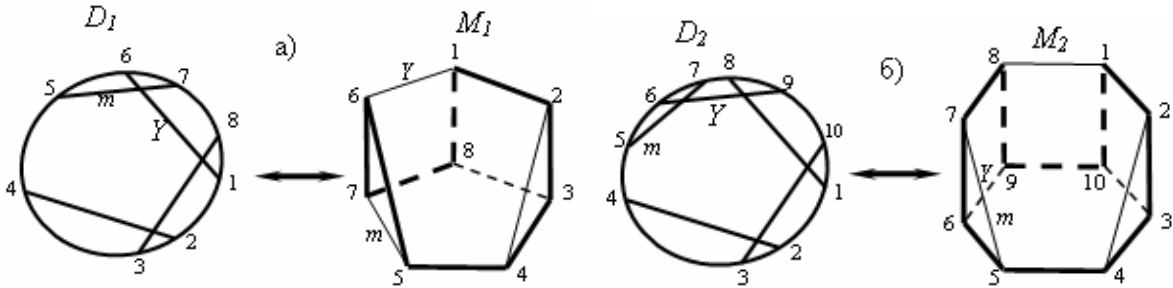


Рис. 8. Построение многогранников для R_4 и R_5

Полученный многогранник M_1 показан на рисунке 8 а. Аналогичным образом можно получить из многогранника M_1 , соответствующего R_4 многогранник M_2 , соответствующий R_5 (здесь в качестве вершины X будем также рассматривать вершину под номером 5) (рис. 8 б), затем R_6 и т. д. В каждой новой диаграмме ту хорду, которую пересекаем, будем также обозначать через Y , а малую дополнительную хорду – через m .

Из рисунков 7 и 8 видно, у многогранника рационального узла R_3 в основании лежит четырехугольник; узла R_4 – пятиугольник и так далее.

Таким образом, многогранник рационального узла R_k получается из призмы, в основании которой лежит многоугольник с количеством вершин $(k + 1)$, «спаиванием» верхнего и нижнего ребер, как упоминалось выше. Если рассмотреть проекцию такого многогранника на его нижнее основание и задать на нем обход (гамильтонов путь) так, как показано на рис. 9 (на примере многогранника для R_5), то мы получим d -диаграмму рационального узла, соответствующего данному многограннику.

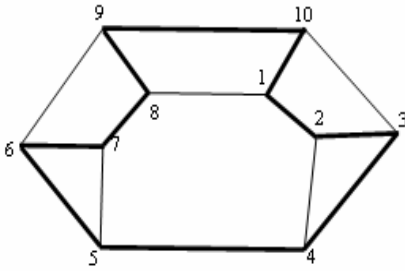


Рис. 9. Гамильтонов путь

Итак, теперь мы знаем, как строятся многогранники, соответствующие простейшим рациональным узлам вида R_k .

Рассмотрим более сложный случай, то есть ответим на последний поставленный вопрос. В качестве исходных данных возьмем d -диаграмму D_1 , в которой хорда Y уже пересечена одной хордой m , и соответствующий ей многогранник M_1 . Наша цель – построить многогранник M_2^* , соответствующий d -диаграмме D_2^* , которая получается из d -диаграммы D_1 , если в ней хорду Y пересечь еще одной хордой m_1 (рис. 10).

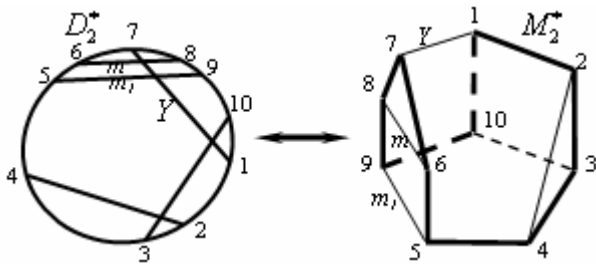


Рис. 10. Построение многогранника M_2^*

Очевидно, что многогранник M_2^* d -диаграммы D_2^* строится из многогранника M_1 . Рассмотрим то же ребро Y в M_1 и вершину X (вершину под номером 6), в которой сходятся три ребра: Y и два толстых (стороны треугольника, который является основанием отсеченной малой пирамиды, входящие в гамильтонов путь). Отсечем еще одну малую пирамиду с вершиной X . Многогранник M_2^* представляет собой многогранник M_1 с отсеченной малой пирамидой в вершине X . А хорда m_1 есть одна из сторон треугольника – основания отсеченной пирамиды (та, которая не входит в гамильтонов путь).

И так далее. Работать нужно с тем ребром, которое задает хорду Y , пересекаемую несколько раз в d -диаграмме. Гамильтонов путь в каждом новом многограннике будет меняться лишь там, где появляются новые грани. Тем самым будет меняться нумерация вершин многогранника. На рисунке 11 показан многогранник M_3^* , соответствующий d -диаграмме D_3^* , в которой хорда Y трижды пересечена малыми хордами.

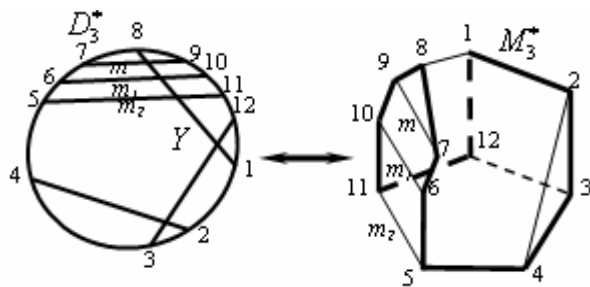


Рис. 11. Построение многогранника M_3^*

Аналогично можно построить многогранник, соответствующий d -диаграмме, в которой каждая хорда пересечена несколькими малыми хордами.

Напомним, что построение многогранника основано на выборе гамильтонова цикла. Вопрос о количестве гамильтоновых циклов на многограннике до сих пор не решен. Неизвестно даже существует ли на данном многограннике хоть один гамильтонов цикл. Ясно, что в случае существования нескольких гамильтоновых циклов на многограннике, один и тот же многогранник может соответствовать разным d – диаграммам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анюшина, Е. И.* d -диаграммы. Рациональные узлы. Полином Конвея для рациональных узлов вида $R(0,0,0,0,0,0)$ // Труды кафедры геометрии Московского государственного областного университета №4, сборник научно-методических работ, 2007, стр. 5 –10.
2. *Мантуров, В. О.* Лекции по теории узлов и их инвариантов, М.: Эдиториал УРСС, 2001, стр.1 – 304.
3. *Мантуров, О. В., Скрипченко, О. С.* d -диаграммы рациональных узлов // Труды кафедры геометрии Московского государственного областного университета №3, сборник научно-методических работ, 2006, стр. 30 – 36.
4. *Kauffman, L., Lambropoulou, S.* Classifying and applying rational knots and rational tangles// Contemporary mathematics, 1999, pp 1 – 37.

RATIONAL KNOTS AND POLYHEDRONS

Anyushina E. I.

Chord d -diagram of a knot corresponding to a polyhedron is considered. The knot can be restored unequivocally by its d -diagram. Thus, a knot corresponds to a polyhedron, and a polyhedron – to a d -diagram. The method for construction of polyhedrons corresponding to rational knots is considered