СТРУКТУРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРИ-ТКАНИ С КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННЫМИ ОСНОВНЫМИ ТЕНЗОРАМИ И ТЕНЗОРОМ КРИВИЗНЫ МИНИМАЛЬНОГО РАНГА

Пиджакова Л. М.

Рассматривается специальный класс многомерных три-тканей с ковариантно постоянными основными тензорами, тензор кривизны которых распадается в произведение одновалентных тензоров

Введение. Теория тканей существенно сложнее теории групп Ли, поэтому в ней не так много примеров тканей того или иного класса. Имеются примеры три-тканей Муфанг, Бола, шестиугольные и др., но чаще всего это ткани малых размерностей [1]. Поэтому одна из целей настоящей работы – нахождение структурных уравнений многомерных три-тканей специального класса. Кроме этого, известно, что теория тканей имеет обширные физические приложения. Особенно плодотворной оказалась связь теории многомерных тканей с теорией квазигрупп. В работе Нестерова А. И. [2] проанализированы возможности применения квазигрупповых идей в различных областях теоретической физики (теория поля, общая теория относительности и др.). В связи с этим необходимы примеры тканей в каком-то смысле близких к группам Ли. В этой работе рассматривается именно такой пример. Рассматриваются многомерные ткани с ковариантно постоянными основными тензорами, тензор кривизны которых имеет вид $b^i_{jkl} = \mu^i b_j c_k d_l$. Обозначим такие ткани W^∇. Ткани W^∇ образуют подкласс в классе тканей W_s, то есть $W^\nabla \subset W_s$, которые исследовались в работе [3] (в [3] они обозначались T_s). Более подробно четырехмерные ткани этого класса изучались в работе Г. А. Толстихиной [4]. С другой стороны, четырехмерные три-ткани с ковариантно постоянными тензорами рассматривались в работе [5]. В статье [6] мы рассматривали ткани с ковариантно постоянными тензорами и симметричным тензором кривизны. Были получены соответствующие тензорные соотношения и найден пример четырехмерной ткани этого класса.

Как и в книге [7], мы задаем слоения произвольной многомерной три-ткани W на многообразии M размерности $2r$ уравнениями $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$, $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, $i = 1, 2, ..., r$. Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ образуют кобазис на многообразии M три-ткани и удовлетворяют следующим структурным уравнениям [7]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\, \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\, \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k,$$

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jkl}\, \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \tag{1}$$

$$b^i_{[jkl]} = 2a^m_{[jk} a^i_{|m|l]}, \quad \nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|l|k]}\, \underset{1}{\omega}^l + b^i_{[jk]l}\, \underset{2}{\omega}^l.$$

Мы рассматриваем ткань, для которой

$$\nabla a^i_{jk} = 0\,,\ \nabla b^i_{jkl} = 0\,. \tag{2}$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений приводит к следующим тензорным соотношениям [6]:

$$a^i_{mk} b^m_{jpq} + a^i_{jm} b^m_{kpq} = 0\,, \tag{3}$$

$$b^i_{jkp} a^p_{lm} = 0\,, \tag{4}$$

$$b^m_{jkl} b^i_{mpq} - b^i_{mkl} b^m_{jpq} - b^i_{jml} b^m_{kpq} - b^i_{jkm} b^m_{lpq} = 0\,. \tag{5}$$

Кроме того, из (1) и (2) следует, что тензор кривизны b^i_{jkl} симметричен по всем нижним индексам

$$b^i_{jkl} = b^i_{(jkl)}\,, \tag{6}$$

а компоненты тензора кручения удовлетворяют тождеству Якоби:

$$a^m_{jk} a^i_{ml} + a^m_{lj} a^i_{mk} + a^m_{kl} a^i_{mj} = 0\,.$$

Следовательно, локальная алгебра ткани, определяемая тензором кручения a^i_{jk}, является алгеброй Ли.

Рассмотрим три-ткани, у которых тензор кривизны имеет минимальный ранг, то есть

$$b^i_{jkl} = \mu^i b_j c_k d_l\,.$$

В силу симметричности тензора b^i_{jkl} по нижним индексам (6) получаем, что компоненты тензора имеют следующее строение

$$b^i_{jkl} = \mu^i b_j b_k b_l\,. \tag{7}$$

Тогда соотношения (5) примут следующий вид:

$$\mu^m b_m b_j b_k b_l b_p b_q = 0\,.$$

Если все $b_j = 0$, то $b^i_{jkl} = 0$ и рассматриваемая ткань является групповой [7]. Этот случай оставляем в стороне как тривиальный, поэтому из последнего равенства следует

$$\mu^m b_m = 0\,. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (4), получим

$$b_p a^p_{lm} = 0\,. \tag{9}$$

Далее, с учетом (7) соотношения (3) дают

$$a^i_{mk} \mu^m b_j + a^i_{jm} \mu^m b_k = 0\,. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь дифференциальные соотношения. Вторая серия уравнений (2) в силу (7) примет следующий вид:

$$\nabla\mu^m b_j b_k b_l + \mu^m \nabla b_j b_k b_l + \mu^m b_j \nabla b_k b_l + \mu^m b_j b_k \nabla b_l = 0\,. \qquad (11)$$

Сворачивая с μ^l, получаем

$$\nabla b_l \mu^l = 0\,. \qquad (12)$$

С другой стороны, дифференцируя внешним образом соотношение (8), получим

$$\nabla\mu^m b_m + \mu^m \nabla b_m = 0\,.$$

С учетом (12) имеем

$$\nabla\mu^m b_m = 0\,. \qquad (13)$$

Выберем репер так, чтобы ковектор b_i стал базисным:

$$b_1 \neq 0\,,\ b_{\hat{i}} = 0\ \ (\hat{i} = \overline{2,r}), \qquad (14)$$

тогда из (8) следует $\mu^1 = 0$, а из (7) вытекает, что ненулевыми компонентами тензора b^i_{jkl} будут только $b^{\hat{i}}_{111}$.

Из условия (9) в силу (14) получаем:

$$a^1_{lm} = 0\,,$$

а из соотношений (10)

$$a^{\hat{i}}_{\hat{m}\hat{k}} \mu^{\hat{m}} = 0\,.$$

В силу проведенной канонизации репера структурные уравнения ткани дают:

$$d\omega^1_i = \omega^k_i \wedge \omega^1_k\,.$$

Отсюда следует, что система уравнений $\omega^1_i = 0$ вполне интегрируема, поэтому можно сузить семейство адаптированных реперов рассматриваемой ткани, положив

$$\omega^1_i = 0\,.$$

Из оставшихся структурных уравнений этой серии получаем:

$$d\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}} = \omega^{\hat{k}}_{\hat{j}} \wedge \omega^{\hat{i}}_{\hat{k}}\,.$$

Отсюда следует, что система $\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0$ также вполне интегрируема, то есть можно положить

$$\omega^{\hat{i}}_{\hat{j}} = 0\,. \qquad (15)$$

В результате ненулевыми из форм ω^i_j остаются только формы $\omega^{\hat{i}}_1$, которые удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_1^{\hat{i}} = \mu^{\hat{i}} (b_1)^3 \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 .$$

Далее, в силу всех найденных условий имеем:

$$\nabla b_{\hat{i}} = 0 , \ \nabla \mu^1 = 0 ,$$

$$\nabla b_1 = db_1 + b_k \omega_1^k = db_1 + b_1 \omega_1^1 + b_{\hat{k}} \omega_1^{\hat{k}} = db_1 , \tag{16}$$

$$\nabla \mu^{\hat{i}} = d\mu^{\hat{i}} - \mu^k \omega_k^{\hat{i}} = d\mu^{\hat{i}} - \mu^1 \omega_1^{\hat{i}} - \mu^{\hat{k}} \omega_{\hat{k}}^{\hat{i}} = d\mu^{\hat{i}} .$$

С учетом канонизации уравнение (11) примет вид:

$$\nabla \mu^{\hat{i}} (b_1)^3 + 3\mu^{\hat{i}} (b_1)^2 \nabla b_1 = 0 ,$$

или, ввиду (16),

$$d\mu^{\hat{i}} (b_1)^3 + 3\mu^{\hat{i}} (b_1)^2 db_1 = 0 .$$

После интегрирования получаем:

$$\mu^{\hat{i}} (b_1)^3 = b_{111}^{\hat{i}} = const \overset{def}{=} c^{\hat{i}} .$$

Остальные компоненты тензора b_{jkl}^i, как уже было отмечено, равны нулю. При этом из соотношений (3) следует

$$a_{\hat{m}\hat{k}}^{\hat{i}} c^{\hat{m}} = 0 ,$$

а соотношения (13) удовлетворяются тождественно.

Из условия ковариантного постоянства тензора кручения (см. (2)) имеем:

$$da_{jk}^{\hat{i}} - a_{mk}^{\hat{i}} \omega_j^m - a_{jm}^{\hat{i}} \omega_k^m = 0 .$$

В силу (15) для величин $a_{\hat{j}\hat{k}}^{\hat{i}}$ получим $da_{\hat{j}\hat{k}}^{\hat{i}} = 0$, то есть $a_{\hat{j}\hat{k}}^{\hat{i}} = const \overset{def}{=} c_{\hat{j}\hat{k}}^{\hat{i}}$. Далее, в силу (15)

$$da_{1\hat{k}}^{\hat{i}} - a_{\hat{m}\hat{k}}^{\hat{i}} \omega_1^{\hat{m}} - a_{1\hat{m}}^{\hat{i}} \omega_{\hat{k}}^{\hat{m}} = 0 \ \Rightarrow \ da_{1\hat{k}}^{\hat{i}} - a_{\hat{m}\hat{k}}^{\hat{i}} \omega_1^{\hat{m}} = 0 .$$

Доказана

Лемма. *Структурные уравнения ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения, компоненты тензора кривизны которой имеют специальное строение (7), могут быть приведены к следующему виду:*

$$d\underset{1}{\omega}^1 = 0 , \ d\underset{1}{\omega}^{\hat{i}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\hat{i}} + 2a_{1\hat{k}}^{\hat{i}} \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} + c_{\hat{j}\hat{k}}^{\hat{i}} \underset{1}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{1}{\omega}^{\hat{k}} ,$$

$$d\underset{2}{\omega}^1 = 0 , \ d\underset{2}{\omega}^{\hat{i}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega_1^{\hat{i}} - 2a_{1\hat{k}}^{\hat{i}} \underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}} - c_{\hat{j}\hat{k}}^{\hat{i}} \underset{2}{\omega}^{\hat{j}} \wedge \underset{2}{\omega}^{\hat{k}} , \tag{17}$$

$$d\omega_1^{\hat{i}} = c^{\hat{i}} \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1 ,$$

$$da_{1\hat{k}}^{\hat{i}} = c_{\hat{m}\hat{k}}^{\hat{i}} \omega_1^{\hat{m}} ,$$

причем выполняются соотношения

$$c^{\hat{i}}_{\hat{m}\hat{k}} c^{\hat{m}} = 0 . \tag{18}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (17) приводит к тождествам, следовательно, *рассматриваемый класс тканей задается набором постоянных* $c^{\hat{i}}_{\hat{m}\hat{k}}$, $c^{\hat{i}}$, *связанных соотношениями (18).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goldberg, V.V.and Akivis, M.A.* Algebraic aspect of web geometry. Comment. Math. Univ. Carolin. 41 (2000), no. 2, P. 205-236.
2. *Нестеров, А.И.* Квазигрупповые идеи в физике//В сб. Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики.- Тарту.- 1990.- Т. 66.- с. 107-120.
3. *Шелехов, А.М.* О три-тканях с частично симметричным тензором кривизны. Сиб.мат.ж., 1981, с. 210-219.
4. *Толстихина*, *Г.А.* Четырехмерные ткани с симметричным тензором кривизны. Ткани и квазигруппы, Калинин, 1981, с. 12-22.
5. *Клековкин*, *Г. А.* Четырехмерные ткани с ковариантно постоянным тензором кривизны. Ткани и квазигруппы, Калинин, 1984, с. 56-63.
6. *Shelekhov, A.M. and Pidzhakova, L.M.* On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors // Webs and Quasigroups. - Tver, Tver State University 1998-1999. - P. 92-103.
7. *Akivis, M.A. and Shelekhov, A.M.* Geometry and Algebra of Multidimensional three-webs. - Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1992. - 358 с.

STRUCTURAL EQUATIONS OF THREE-WEBS WITH COVARIANT FREE BASIC TENSORS AND WITH CURVATURE TENSOR OF MINIMAL RANK

Pidzhakova L. M.

A special class of multidimensional three-webs with covariant free basic tensors, which curvature tensor can be factorized into monovalent tensors, is considered