ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА В АЛГЕБРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пожидаева Е. В.

В настоящей работе дан очерк основных идей и понятий теории мультипликативного интеграла. Приведены начальные факты, начальные приемы вычисления. Описаны основные конструкции мультипликативного интеграла, возникающие в различных разделах математики, механики и физики

Введем понятие мультипликативного интеграла. Пусть на отрезке $[a;b]$ определена $f(t)$ – функция вещественного переменного t, принимающая значения в произвольной ассоциативной топологической алгебре А с единицей Е. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей точками $t_0, t_1, \ldots, t_n : a = t_0 < x_1 < \ldots < t_n = b$ и положим $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. На каждом таком отрезке разбиения выберем некоторую точку t_k и составим произведение:

$$\Pi(1 + f(t_k)\Delta_k) = (1 + f(t_1)\Delta_1)(1 + f(t_2)\Delta_2)\ldots(1 + f(t_n)\Delta_n).$$

Перейдем к пределу при неограниченном увеличении числа интервалов разбиения и стремления к нулю длин этих интервалов, т. е. при $\Delta_k \to 0$. Получим:

$$\lim_{\Delta_k \to 0} \Pi(1 + f(t_k)\Delta_k) = \lim_{\Delta_k \to 0} (1 + f(t_1)\Delta_1)(1 + f(t_2)\Delta_2)\ldots(1 + f(t_n)\Delta_n). \quad (1)$$

Выражение, стоящее под знаком предела в равенстве (1), представляет собой интегральное произведение, которое есть аналог интегральной суммы для интеграла Римана. Предел этого произведения называется мультипликативным интегралом по отрезку $[a;b]$ и обозначается через

$$\int_a^{\cup b} 1 + f(x)dx = \lim_{\Delta_k \to 0} \Pi(1 + f(t_k)\Delta_k). \quad (2)$$

Символ $\cup$, называемый кап (*cup – англ.*), указывает на то, что множители с меньшими номерами пишутся левее множителей с большими номерами.

Аналогичным образом можно построить произведение множителей в обратном порядке, тогда мультипликативный интеграл имеет вид:

$$\int_a^{\cap b} 1 + f(x)dx = \lim_{\Delta_k \to 0} \Pi(1 + f(t_k)\Delta_k) =$$

$$= \lim_{\Delta_k \to 0} (1 + f(t_n)\Delta_n)\ldots(1 + f(t_2)\Delta_2)(1 + f(t_1)\Delta_1). \quad (3)$$

Символ $\cap$, называемый кэп (*cap – англ.*), указывает на то, что множители с меньшими номерами пишутся правее множителей с большими номерами.

В дальнейшем мультипликативные интегралы (2) и (3) будем называть соответственно прямым и обратным.

Описанные конструкции во многом аналогичны конструкции риманова интеграла. Действительно, риманов интеграл является пределом суммы большого числа слагаемых, близких к нулю, а мультипликативный интеграл равен пределу произведения большого количества сомножителей, близких к единице.

Вычисление мультипликативного интеграла $F(x) = \overset{\cup\, x}{\underset{a}{\int}} 1 + f(t)dt$ сводится к решению дифференциального уравнения, так как подынтегральная функция с первообразной функцией связаны следующим образом:

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x)(1 + f(x)\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)F(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)F(x).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dF}{dx} = f(x)F(x),$$

где $F(x)$ – первообразная функция.

Решением такого уравнения будет функция $F(x) = e^{\int f(x)dx}$, тогда и только тогда, когда выполняется условие Лаппо-Данилевского:

$$f(x_1)f(x_2) = f(x_2)f(x_1),$$

т.е. когда различные значения подынтегральной функции перестановочны между собой.

Рассмотрим частные случаи мультипликативного интеграла.

Пусть $A = Mat(n)$ – алгебра всех вещественных квадратных $n \times n$ матриц с операцией умножения. Вычисление мультипликативного интеграла $\overset{\cup}{\int} 1 + f(x)dx$, где $f(x) = x$ – упрощенная матрица первого порядка, сводится к решению соответствующего дифференциального уравнения:

$$F'(x) = f(x)F(x),$$

или

$$\frac{dF}{dx} = xF(x).$$

Так как значения подынтегральной функции при различных x_1 и x_2 перестановочны, условие Лаппо-Данилевского выполняется, а значит, справедлива формула Лиувилля-Остроградского. Таким образом, решение дифференциального уравнения и, следовательно, нашего интеграла:

$$F(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int x dx}=Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Пусть $f(x)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ – постоянная матрица второго порядка, тогда мультипликативный интеграл $\overset{\cup}{\int} E+\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}dx$ является функцией $F(x)$, принимающей матричные значения.

Так как подынтегральная матричная функция перестановочна, то решение этого интеграла и, соответственно, дифференциального уравнения:

$$F'(x)=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}F(x)$$

имеет вид:

$$F(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}dx}=Ce^{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x},$$

где $e^{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}x}=\begin{pmatrix} (1+x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1-x)e^{2x} \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$F(x)=C\begin{pmatrix} (1+x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1-x)e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что каждый из столбцов $\overline{y}(x)$ матрицы $F(x)$ является решением векторной системы уравнений $\overline{y'}(x)=f(x)\overline{y}(x)$. Таким образом, вычисление мультипликативного интеграла эквивалентно решению системы линейных уравнений.

Рассмотрим некоторые мультипликативные интегралы в дифференциальных операторах и установим их практическое значение.

Пусть А – алгебра дифференциальных операторов, действующих в пространстве функций $g(u)$, определенных на действительной оси u. Умножение дифференциальных операторов в алгебре А определяется как суперпозиция этих элементов.

Рассмотрим мультипликативный интеграл:

$$\overset{\cup}{\int_0^x} E+\frac{\partial}{\partial u}dt,$$

где $\partial=\frac{\partial}{\partial u}$ – оператор дифференцирования по u, который всякую функцию переводит в ее производную. Будем рассматривать этот оператор как функцию вещественного переменного t, принимающую постоянное значение $\frac{\partial}{\partial u}$ в А.

Оператор $\partial = \frac{\partial}{\partial u}$ коммутативен, а, значит, удовлетворяет условию Лаппо-Данилевского (так как $\partial = \frac{\partial}{\partial u} = const$). Следовательно, справедлива формула Лиувилля- Остроградского, и поэтому соответствующее дифференциальное уравнение:

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial u} F(x)$$

имеет решение:

$$F(x) = e^{\int_0^x \frac{\partial}{\partial u} dt} = Ce^{x\,\partial},$$

где $e^{x\partial} = 1 + x\partial + \frac{x^2\partial^2}{2!} + \frac{x^3\partial^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n\partial^n}{n!} + \cdots$. Покажем, как этот оператор действует на некоторую функцию $g(u)$:

$$e^{x\partial} g(u) = g(u) + x\partial g(u) + \frac{x^2\partial^2}{2!} g^2(u) + \frac{x^3\partial^3}{3!} g^3(u) + \cdots =$$

$$= g(u) + xg'(u) + \frac{x^2}{2!} g''(u) + \frac{x^3}{3!} g'''(u) + \cdots = \sum \frac{x^k g^k(u)}{k!} = g(x+u)$$

Таким образом, аналитическая функция $g(x)$ под действием дифференциального оператора $e^{x\,\partial}$ переходит в $g(x+u)$ – функцию сдвига:

$$e^{x\,\partial} : g(x) \to g(x+u).$$

Рассмотрим мультипликативный интеграл:

$$\int_0^{\cup\, x} 1 + \frac{\partial^2}{\partial u^2} dt,$$

где $\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2}$ – дифференциальный оператор, и установим его практическое значение. Искомому интегралу соответствует дифференциальное уравнение:

$$F'(x) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} F(x).$$

Условие Лаппо-Данилевского выполняется, поэтому решение данного мультипликативного интеграла имеет вид:

$$F(x)=e^{\int_0^x \frac{\partial^2}{\partial u^2}dt}=Ce^{x\frac{\partial^2}{\partial u^2}},$$
где $e^{x\partial^2}=1+x\partial^2+\frac{x^2\partial^4}{2!}+\frac{x^3\partial^6}{3!}+\cdots+\frac{x^n\partial^{2n}}{n!}+\cdots$. Покажем, как этот оператор действует на функцию $g(u)$:

$$e^{x\partial^2}g(u)=g(u)+x\partial^2 g(u)^2+\frac{x^2\partial^4}{2!}g^4(u)+\frac{x^3\partial^6}{3!}g^6(u)+\cdots=$$
$$=g(u)+xg''(u)+\frac{x^2}{2!}g^{IV}(u)+\frac{x^3}{3!}g^{VI}(u)+\cdots$$

Полученный ряд удовлетворяет уравнению теплопроводности:
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2},$$
где $f(x,u)$ – функция распределения температуры в стержне в момент времени t. Функция $g(u)=f(0,u)$ – начальное распределение температуры в момент времени $t=0$. Следовательно, наш оператор $e^{x\partial^2}$ переводит функцию $g(u)=f(0,u)$ распределения температуры в начальный момент времени в функцию $f(x,u)$ – распределения температуры в момент времени t:
$$e^{x\partial^2}:\ g(u)=f(0,u)\to f(x,u).$$

Таким образом, мультипликативный интеграл $\int_0^{\cup x} 1+\frac{\partial^2}{\partial u^2}dt$ решает уравнение теплопроводности.

Рассмотренные примеры показывают, что существенные черты конструкции мультипликативного интеграла существенным образом проявляют себя в задачах, связанных с уравнениями математической физики.

Пусть $L(t,x)=tx+\partial$ – функция вещественного переменного x со значениями в алгебре дифференциальных операторов, действующих на функцию $\varphi(t)$ переменного t. Вычислить мультипликативный интеграл $\int_0^{\cup T}(E+L(t,x))dt$ можно, исследуя соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных:
$$\frac{\partial f}{\partial x}=L(t,x)f.$$

Рассмотрим произведение:

$$\prod\left(1+L\left(t_i,x\right)\Delta\right),$$

где $t\in[0;T]$. Разбив отрезок $[0;T]$ на n равных частей, принимаем $\Delta=\dfrac{T}{n}$.

Обозначим через $V_i=L\left(t_i\right)\Delta$, тогда произведение $\prod\left(1+L\left(t_i\right)\Delta\right)$ примет вид:

$$\prod\left(1+V_i\right)=1+\sum_i V_i+\sum_{i<j}V_iV_j+\cdots,\ [i=1,\ldots,n\,;\,j=1,\ldots,n].$$

Перейдем к пределу в обеих частях полученного выражения и ограничимся рассмотрением только первых трех слагаемых:

$$\lim_{n\to\infty}\prod\left(1+V_i\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\sum_i V_i+\lim_{n\to\infty}\sum_{i<j}V_iV_j=1+\int L dt+\lim_{n\to\infty}\sum_{i<j}V_iV_j\ ,$$

где $\sum\limits_{i<j}V_iV_j=\sum\limits_{i,j}V_iV_j-\sum\limits_{i>j}V_iV_j$.

Сомножители V_i и V_j не перестановочны между собой, так как коммутатор $\left[V_i,V_j\right]\neq 0$, поэтому $V_iV_j=V_jV_i-\left[V_j,V_i\right]$, а в свою очередь

$$\left[V_j,V_i\right]=\left[\left(t_jx+\partial\right)\Delta,\left(t_ix+\partial\right)\Delta\right]=\Delta^2\left[t_jx+\partial,\ t_ix+\partial\right]=\Delta^2\left(\left[t_jx\ ,t_ix\right]+\left[t_jx\ ,\partial\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\partial\ ,t_ix\right]+\left[\partial,\partial\right]\right)=\Delta^2\left(t_j\left[x,\partial\right]+t_i\left[\partial,x\right]\right)=\Delta^2\left(-t_j\left[\partial,x\right]+t_i\left[\partial,x\right]\right)=$$
$$=\Delta^2\left(t_i-t_j\right)\left[\partial,x\right]=\Delta^2\left(t_i-t_j\right).$$

Тогда

$$\sum_{i<j}V_iV_j=\sum_{i,j}V_iV_j-\sum_{i<j}V_iV_j+\Delta^2\sum_{i<j}\left(t_i-t_j\right)$$

и, очевидно,

$$2\sum_{i<j}V_iV_j=\sum_{i,j}V_iV_j+\Delta^2\sum_{i<j}\left(t_i-t_j\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{i<j}V_iV_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}V_iV_j+\frac{\Delta^2}{2}\sum_{i<j}\left(t_i-t_j\right).$$

Рассмотрим сумму $\sum\limits_{i<j}\left(t_i-t_j\right)$ на отрезке $[0;T]$, где $t_i=\dfrac{iT}{n}$, $t_j=\dfrac{jT}{n}$, тогда

$$\sum_{i<j}\left(t_i-t_j\right)=\frac{T}{n}\sum_{i<j}\left(i-j\right)=-\frac{T}{n}\sum_{i<j}\left(j-i\right),$$

где $\sum\limits_{1}^{n}\left(j-i\right)=1\cdot\left(n-1\right)+2\cdot\left(n-2\right)+3\cdot\left(n-3\right)+\cdots+\left(n-1\right)\cdot 1=\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot\left(n-k\right).$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\prod\left(1+V_i\right)=1+\int Ldt+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}V_iV_j-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^2 T}{n}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\left(n-k\right)=$$

$$=1+\int Ldt+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i}V_i\lim_{n\to\infty}\sum_{j}V_j-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{T^2T}{n^2n}\sum_{k=1}^{n}\left(nk-k^2\right)=$$

$$=1+\int Ldt+\frac{1}{2}\left(\int Ldt\right)^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{T^3}{n^3}\left(n\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)=$$

$$=1+\int Ldt+\frac{1}{2}\left(\int Ldt\right)^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{T^3}{n^3}\left(n\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=$$

$$=1+\int Ldt+\frac{1}{2}\left(\int Ldt\right)^2-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{T^3\left(n^3-n\right)}{6n^3}=1+\int Ldt+\frac{1}{2}\left(\int Ldt\right)^2-\frac{t^3}{12}.$$

В итоге получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\prod\left(1+L(t_i,x)\Delta\right)=1+\int L(t,x)dt+\frac{\left(\int L(t,x)dt\right)^2}{2}-\frac{t^3}{12},$$

или

$$\int_0^{\cup T}\left(1+L(t,x)\right)dt=1+\int L(t,x)dt+\frac{\left(\int L(t,x)dt\right)^2}{2}-\frac{t^3}{12}.$$

Выше были рассмотрены случаи, когда различные значения подынтегральной функции коммутативны, т.е. перестановочны между собой. В этом случае выполнялось условие Лаппо-Данилевского и решение мультипликативного интеграла мы находили по формуле Лиувилля-Остроградского. В теории мультипликативного интеграла отмечаются и более сложные случаи, когда различные значения подынтегральной функции не коммутируют между собой. В этом случае условие Лаппо-Данилевского не выполняется и целесообразно использовать формулу Резальвента, т. е. необходимо переставлять соседние элементы и учитывать те остаточные члены, которые получаются в результате таких перестановок. На последнем примере мы выяснили, что перестановка двух соседних элементов дает остаточный член $\frac{t^3}{12}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. С. 433–439.
2. *Мантуров О.В*. Мультипликативный интеграл. Проблемы геометрии, 1990, т.22, С. 167–215.
3. *Мантуров О.В., Паланджанс Л.Ж.* Мультипликативный интеграл и некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. // Прикл. вопр. дифференц. геометрии. М., 1983. с. 95–100.
4. *Паланджанс Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. Майкоп, 1997.
5. *Пожидаева Е.В.* Некоторые задачи мультипликативного интеграла. Научные труды кафедры

геометрии Московского Государственного Областного Университета, №4, С. 87–91.
6. *Пожидаева Е.В.* Мультипликативный интеграл в дифференциальных операторах. Научные труды кафедры геометрии Московского Государственного Областного Университета, №4, С. 84–86.
7. *Dollard J. D., Friedman Ch. N.* Product integration with applications to differential equations. London, Addison-Wesley Publ. Co., 1979.
8. *Shlesinger L.* Vorlesungen über lineare Differential-gleichungen. Berlin, 1908.

ON A METHOD OF PRODUCT INTEGRAL CALCULATION IN ALGEBRA OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Pozhidaeva E. V.

Revision of basic ideas and concepts of the product integral theory is given. Fundamental definitions and calculation methods are mentioned. Basic forms of product integral arising in various fields of mathematics, mechanics and physics are described