

ОПЕРАТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Чубатов А. А., Кармазин В. Н.

В работе предлагается подход, позволяющий организовать оперативный контроль мощности источника выбросов в атмосферу. Для решения обратной задачи использовались шаговая регуляризация и последовательная функциональная аппроксимация

Введение. Наиболее универсальными моделями для получения количественных и качественных картин распределения загрязнений в атмосфере являются полуэмпирические модели [1].

Отсутствие исходных данных о мощностях источников выбросов, искажение граничных и начальных условий, неадекватный учет метеорологических характеристик атмосферы приводят к существенным расхождениям между расчетными и экспериментальными данными. В этой связи представляется целесообразным совместное решение прямых и обратных задач распространения примесей в атмосфере на основе данных о замерах концентрации примеси в стационарных или мобильных пунктах контроля. Такой подход позволяет рассчитывать на существенное повышение точности модельных расчетов на математических моделях приемлемой сложности.

Модель. Рассмотрим линейное двумерное полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии [1]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x q) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y q) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial q}{\partial y} \right) + F(x, y, t), \quad (1)$$

где $q(x, y, t)$ — интегральная по высоте концентрация примеси; (v_x, v_y) — вектор скорости ветра; (K_x, K_y) — вектор коэффициентов турбулентной диффузии.

Будем считать, что начальное и граничные условия однородны. Предположим, что имеется один источник выбросов и функция источника представима в виде

$$F(x, y, t) = f(x, y) \cdot g(t), \quad (2)$$

где функция $f(x, y)$ определяет пространственное расположение источника выбросов (например, в источнике функция равна 1, вне источника — 0); $g(t)$ характеризует интенсивность действия источника.

Прямая задача состоит в определении поля концентрации $q(x, y, t)$ при известных (K_x, K_y) , (v_x, v_y) , $f(x, y)$, $g(t)$. Рассмотрим обратную задачу, состоящую в определении $g(t)$ по заданным (K_x, K_y) , (v_x, v_y) , $q(x, y, t)$, $f(x, y)$.

На практике при определении поля концентрации $q(x, y, t)$ возникает ряд проблем:

- измерения концентрации не проводятся во всей области;
- концентрация не может измеряться непрерывно по времени;
- существуют ошибки измерений.

Будем считать, что в точках (x_j, y_j) , $j=1, 2, \dots, J$ установлены датчики, которые измеряют интегральную концентрацию в дискретные моменты времени t_i и ошибка измерений мультипликативна

$$\bar{q}_{ji} = q(x_j, y_j, t_i) \cdot (1 + \delta_j \gamma), \quad (3)$$

где δ_j — относительная среднеквадратичная ошибка измерений датчика;

γ — нормальная случайная величина с единичной дисперсией.

Теорема Дюамеля. Линейность задачи и условие (2) позволяют воспользоваться теоремой Дюамеля:

$$q(x, y, t) = \int_0^t g(\tau) \frac{\partial Q(x, y, t - \tau)}{\partial t} d\tau,$$

где $Q(x, y, t)$ — решение прямой задачи (1) при $g(t) = 1$ и однородных начальном и граничных условиях.

Учитывая, что $\frac{\partial Q(x, y, t - \tau)}{\partial t} = -\frac{\partial Q(x, y, t - \tau)}{\partial \tau}$ и что $Q(x, y, t)$ — сеточная функция, запишем численный аналог теоремы Дюамеля:

$$q(x_j, y_j, t_i) = \sum_{n=1}^i g(\tau_{n-1/2}) \frac{Q(x_j, y_j, t_i - \tau_{n-1}) - Q(x_j, y_j, t_i - \tau_n)}{\tau_n - \tau_{n-1}} (\tau_n - \tau_{n-1})$$

Будем использовать равные шаги по времени $\tau_n - \tau_{n-1} = \Delta t = const$, тогда $\tau_n = n\Delta t$ и $t_i = i\Delta t$, следовательно $t_i - \tau_n = (i - n)\Delta t = t_{i-n}$. Отсюда:

$$q(x_j, y_j, t_i) = \sum_{n=1}^i g(t_{n-1/2}) (Q(x_j, y_j, t_{i-n+1}) - Q(x_j, y_j, t_{i-n}))$$

Введем обозначения $q(x_j, y_j, t_i) = q_{ji}$, $Q(x_j, y_j, t_i) = \phi_{ji}$, $\phi_{j(i-n+1)} - \phi_{j(i-n)} = \Delta\phi_{j(i-n)}$, тогда расчетная концентрация будет равна

$$q_{ji} = \sum_{n=1}^i g(t_{n-1/2}) \Delta\phi_{j(i-n)}. \quad (4)$$

Коэффициенты чувствительности. Величина ϕ_{ji} называется ступенчатым коэффициентом чувствительности, который представляет собой концентрацию примеси в точке расположения j -го датчика в момент времени t_i , при условии $g(t) = 1$, т.е. отклик на единичное ступенчатое возмущение интенсивности действия источника, произошедшее в момент времени $t_0 = 0$. Тогда величину $\phi_{j(i-n)}$ можно трактовать как кон-

центрацию примеси в точке расположения j -го датчика в момент времени t_i , при условии, что единичное ступенчатое возмущение интенсивности действия источника произошло в момент времени t_n .

Величина $\Delta\phi_{j(i-n)}$ называется импульсным коэффициентом чувствительности и представляет собой приращение концентрации примеси в точке расположения j -го датчика в момент времени t_i , при единичном импульсном возмущении интенсивности действия источника, которое началось в момент времени t_{n-1} и закончилось в момент времени t_n .

При равных шагах по времени

$$\Delta\phi_{jk} = \phi_{j(k+1)} - \phi_{jk} = Q(x_j, y_j, t_{k+1}) - Q(x_j, y_j, t_k) = Q(x_j, y_j, (k+1)\Delta t) - Q(x_j, y_j, k\Delta t). \quad (5)$$

Метод функциональной аппроксимации. Обратная задача состоит в нахождении $g(t_{n-1/2})$ из (4) при известных $q_{ji} = q(x_j, y_j, t_i)$ и $\Delta\phi_{j(i-n)}$, где $n = 1, 2, \dots, i$.

Обратные задачи характеризуются неустойчивостью решения к погрешностям исходных данных и требуют специальных методов решения. Такими методами могут быть прямые методы (шаговая регуляризация), методы регуляризации [2,3] и метод функциональной аппроксимации [4]. В методе функциональной аппроксимации функциональная форма неизвестной интенсивности предполагается заранее и включает в себя ряд неизвестных параметров, оцениваемых с помощью метода наименьших квадратов. Неизвестную величину можно оценивать одновременно для всего интервала времени $[0, T]$ (метод аппроксимации во всей области) и последовательно на каждом промежутке $[t_{i-1}; t_i]$.

Рассмотрим функциональную форму, при которой $g(t)$ принимает на каждом временном промежутке $[t_{N-1}; t_N]$ постоянное значение g_N , тогда $g(t_{n-1/2}) = g_n$.

Решение обратной задачи. Воспользуемся методом последовательной функциональной аппроксимации [4]. Необходимо найти g_N , считая g_1, g_2, \dots, g_{N-1} известными величинами, которые были вычислены на предыдущих шагах. Учитывая (4), запишем формулы для рассчитанных концентраций в момент времени t_N (всего J уравнений)

$$q_{jN} = \sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta\phi_{j(N-n)} + g_N \Delta\phi_{j0}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (6)$$

Введем обозначение $\sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta\phi_{j(N-n)} = q_{jN}|_{g_N=0}$ — концентрация в момент времени t_N

в случае, если $g_N = 0$.

Тогда уравнения (6) можно записать в матричном виде:

$$Q_N = Q_N|_{g_N=0} + \Phi_0 g_N, \quad \text{где } Q_N = \begin{bmatrix} q_{1N} \\ \dots \\ q_{jN} \end{bmatrix}, \quad Q_N|_{g_N=0} = \begin{bmatrix} q_{1N}|_{g_N=0} \\ \dots \\ q_{jN}|_{g_N=0} \end{bmatrix}, \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} \Delta\phi_{10} \\ \dots \\ \Delta\phi_{j0} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Умножим уравнение (6) слева на транспонированную матрицу Φ_0^T

$$\Phi_0^T (\mathcal{Q}_N - \mathcal{Q}_N|_{g_N=0}) = \Phi_0^T \Phi_0 g_N,$$

тогда, если существует матрица $(\Phi_0^T \Phi_0)^{-1}$, значение g_N находится по формуле

$$g_N = (\Phi_0^T \Phi_0)^{-1} \Phi_0^T (\mathcal{Q}_N - \mathcal{Q}_N|_{g_N=0}). \quad (8)$$

В данном случае произведение матриц $\Phi_0^T \Phi_0 = \sum_{j=1}^J \Delta \phi_{j0}^2$ представляет собой число.

Это число может оказаться близким к нулю, например, при $J=1$ и $\Delta \phi_{10} \ll 1$, что наблюдается при малых шагах по времени. В этом случае решение обратной задачи может быть неустойчивым.

Для достижения устойчивости решения необходимо увеличить обусловленность матрицы $\Phi_0^T \Phi_0$. Это можно сделать несколькими способами:

- увеличить шаг по времени Δt , но это не всегда оправдано, т.к. приводит к загрузлению решения;
- увеличить число датчиков и расположить их в точках, где $\Delta \phi_{j0} > \Delta \phi_{10}$, но это не всегда возможно;
- использовать последовательный алгоритм для оценивания на нескольких последовательных интервалах сразу [4].

Первые два способа относятся к саморегуляризации (шаговой регуляризации), рассмотрим третий способ.

Функциональная аппроксимация с несколькими последовательными шагами по времени [4]. Пусть r — число последовательных интервалов. Вместо g_N будем одновременно искать $g_N, g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$. Тогда из (4) запишем систему уравнений для рассчитанных концентраций для моментов времени $t_N, t_{N+1}, \dots, t_{N+r-1}$

$$q_{j(N+k-1)} = \sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta \phi_{j(N-n+k-1)} + \sum_{m=1}^k g_{N+m-1} \Delta \phi_{j(0+k-m)}, \quad j=1, 2, \dots, J, \quad k=1, 2, \dots, r. \quad (9)$$

Введем обозначения $\sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta \phi_{j(N-n+k-1)} = q_{j(N+k-1)}|_{g_N=\dots=g_{N+k-1}=0} = q_{j(N+k-1)}|_{g=0}$ — концентрация в момент времени t_{N+k} в случае, если $g_N = \dots = g_{N+k-1} = 0$,

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_N \\ \dots \\ \mathcal{Q}_{N+r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{N+k-1} = \begin{bmatrix} q_{1(N+k-1)} \\ \dots \\ q_{J(N+k-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}|_{g=0} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_N|_{g=0} \\ \dots \\ \mathcal{Q}_{N+r-1}|_{g=0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{N+k-1}|_{g=0} = \begin{bmatrix} q_{1(N+k-1)}|_{g=0} \\ \dots \\ q_{J(N+k-1)}|_{g=0} \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_1 & \Phi_0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{r-1} & \Phi_{r-2} & \cdots & \Phi_0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_{1(k-1)} \\ \cdots \\ \Delta\phi_{J(k-1)} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_N \\ \cdots \\ g_{N+r-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (9) можно записать в матричном виде:

$$Q = Q|_{g=0} + \Phi G. \quad (10)$$

Матричное уравнение (10) представляет собой систему из $J \cdot r$ уравнений с r неизвестными. К решению уравнения (10) можно подойти двумя способами:

- решать систему с r неизвестными $g_N, g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$;
- сократить число неизвестных, предположив, что $g_{N+1}, \dots, g_{N+r-1}$ зависят каким-либо образом от g_N и от p предыдущих значений $g(t_i): g_{N-p}, \dots, g_{n-2}, g_{N-1}$.

Выберем второй способ и предположим, что

$$G = \begin{bmatrix} g_N \\ \cdots \\ g_{N+r-1} \end{bmatrix} = A g_N + B G_{N-1}, \quad G_{N-1} = \begin{bmatrix} g_{N-p} \\ \cdots \\ g_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В самом простейшем случае предположим, что

$$g_{N+1} = \dots = g_{N+r-1} = g_N, \quad (12)$$

оценим интенсивности и запомним только g_N . Увеличим N на 1 и повторим процедуру. Теперь $g_i, i=1, \dots, N$ считаются известными и временно предполагается, что

$g_{(N+1)+1} = g_{(N+1)+2} = \dots = g_{(N+1)+r-1} = g_{(N+1)}$ и находится $g_{(N+1)}$. Для этого случая A — вектор, состоящий из r единиц, $p=1$ и B — вектор, состоящий из r нулей.

Учитывая (11), из (10) следует $Q = Q|_{g=0} + \Phi B G_{N-1} + \Phi A g_N$. Обозначим измеренные

значения концентрации через $\bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_N \\ \cdots \\ \bar{Q}_{N+r-1} \end{bmatrix}$, $\bar{Q}_{N+k-1} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1(N+k-1)} \\ \cdots \\ \bar{q}_{J(N+k-1)} \end{bmatrix}$. Минимизируем сумму квадратов

разности между измеренными \bar{Q} и рассчитанными Q значениями концентрации:

$$S = (\bar{Q} - Q)^T (\bar{Q} - Q) \rightarrow \min$$

Тогда оценка g_N находится по формуле

$$g_N = ((\Phi A)^T \Phi A)^{-1} (\Phi A)^T (\bar{Q} - Q|_{g=0} - \Phi B G_{N-1}) \quad (13)$$

Представление решения в форме цифрового фильтра. Решение (13) является линейной функцией измеренных концентраций \bar{q}_{ji} и его можно представить в форме цифрового фильтра [5]:

$$g_N = \sum_{i=1}^{N+r-1} \sum_{j=1}^J f_{j(N-i)} \bar{q}_{ji},$$

где коэффициенты цифрового фильтра $f_{j(i-r)} = G_{ji}$, $i = 1, \dots, M+r-1$, G_{ji} – решение обратной задачи при $\bar{q}_{jr} = 1, \bar{q}_{ji} = 0, i \neq r$.

Решение в форме цифрового фильтра в вычислительном отношении эффективнее других форм, т.к. коэффициенты фильтра f_{jk} вычисляются один раз.

Безразмерный вид задачи. Представим уравнение (1) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial q^+}{\partial t^+} + Pe \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^+} (v_x^+ q^+) + \frac{\partial}{\partial y^+} (v_y^+ q^+) \right) = \frac{\partial}{\partial x^+} \left(K_x^+ \frac{\partial q^+}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial y^+} \left(K_y^+ \frac{\partial q^+}{\partial y^+} \right) + Os \cdot g(t^+),$$

где $t^* = l^2 / K^*$ — масштаб времени; $Pe = v^* l / K^*$ — число Пекле; $Os = l^2 f(x^+, y^+) / (K^* q^*)$ — число Остроградского; l, q^*, v^*, K^* — масштабы длины, концентрации, скорости и коэффициентов турбулентной диффузии; $q = q^* q^+, x = lx^+, y = ly^+, t = t^* t^+, K_x = K^* K_x^+, K_y = K^* K_y^+, v_x = v^* v_x^+, v_y = v^* v_y^+$.

Параметризация задачи. Рассмотрим задачу при условиях штиля. Расчетная область представляет собой прямоугольник со стороной 1000м. Масштаб длины $l = 1000$ м. Источник выбросов находится в центре области. В качестве масштаба концентрации возьмем величину $q^* = 0,1 \text{ г/м}^2$. Масштаб коэффициентов турбулентной диффузии примем равным $K^* = 50 \text{ м}^2/\text{с}$. Тогда масштаб времени равен $t^* = 2 \cdot 10^4$ с. Промежуток времени между замерах концентрации выберем равным $\Delta t_{изм} = 200$ с. Пусть шаг решения обратной задачи равен $\Delta t_{обр} = \Delta t_{изм}$, тогда безразмерный шаг решения обратной задачи $\Delta t_{обр}^+ = 0,01$.

Вычислительные эксперименты. Для решения обратной задачи необходимо знать коэффициенты чувствительности, которые являются решением прямой задачи при $g(t^+) = 1$. Для решения прямой задачи написана программа на языке Fortran. В программе использовалась чисто неявная разностная схема. Прямая задача решалась при шаге по времени $\Delta t_{i\delta}^+ = 0,001$ и прямоугольной сетке с шагом по координате $\Delta x^+ = \Delta y^+ = 0,01$. Количество шагов по времени 2000, т.е. $t^+ \in [0; 2]$. Для моделирования измерений концентрации решается прямая задача при известной функции интенсивности действия источника. Решение обратной задачи и визуализация расчетов реализованы в математическом пакете MatLab.

Графики функций чувствительности.

На рис. 1 приведены графики функций чувствительности для трех различных датчиков, расположенных на расстояниях от источника $d_1^+ = 0,5, d_2^+ = 0,14, d_3^+ = 0,22$ со-

ответственно. Импульсные функции чувствительности представляют собой отклики на единичное импульсное (в течение времени $\Delta t_{обр}^+$) изменение интенсивности действия источника. Графики этих функций имеют один максимум (в отдельных случаях функция может быть монотонно возрастающей). На рис. 1 датчик № 2 самый чувствительный: он быстрее (запаздывание меньше, чем у других датчиков) и сильнее (демпфирование меньше, чем у других датчиков) реагирует на изменение мощности источника. С увеличением расстояния от источника сильнее проявляются эффекты запаздывания и демпфирования: максимум функции сдвигается вправо, максимальное значение функции уменьшается, график становится более пологим.

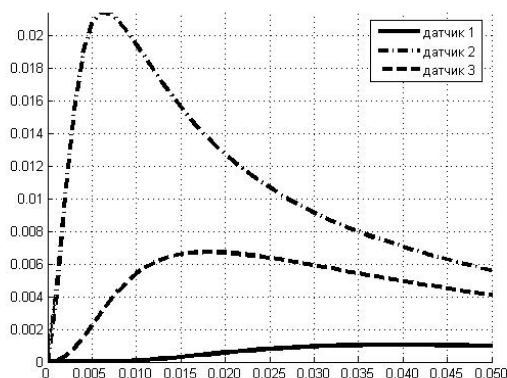


Рис. 1. Графики функций чувствительности $\Delta\phi_j(t^+) = Q(x_j^+, y_j^+, t^+) - Q(x_j^+, y_j^+, t^+ - \Delta t)$

О шаговой регуляризации обратной задачи. Пусть для решения обратной задачи используются данные измерений концентрации, получаемые от одного датчика. Пусть ошибка измерений задается параметром $\delta = 0$. Для устойчивости решения обратной задачи необходимо, чтобы коэффициенты чувствительности были как можно большими по величине. Можно выбрать датчик № 2 и использовать его показания, но, во-первых, на практике не всегда получается расположить датчик близко к источнику, во-вторых, при малом шаге $\Delta t_{обр}^+$ величины коэффициентов чувствительности может быть недостаточно для обеспечения устойчивости решения.

Сформулируем достаточные условия устойчивости решения при шаговой регуляризации. Для данного датчика необходимо выбрать такой критический шаг $\Delta t_{кр}^+$, что при $\Delta t_{обр}^+ \geq \Delta t_{кр}^+$ решение устойчиво, а при $\Delta t_{обр}^+ < \Delta t_{кр}^+$ — неустойчиво.

В случае шаговой регуляризации решение находится по формуле (8) и для его устойчивости необходимо, чтобы в произведении матриц $\Phi_0^T \Phi_0$ элементы главной диагонали были как можно большими по величине. Для случая одного датчика $\Phi_0^T \Phi_0 = \Delta\phi_{j_0}^2$.

Согласно (5), $\Delta\phi_{j_0} = Q(x_j^+, y_j^+, t_1^+) - Q(x_j^+, y_j^+, t_0^+) = Q(x_j^+, y_j^+, t_1^+) - Q(x_j^+, y_j^+, t_1^+ - \Delta t)$, тогда $\Delta\phi_{j_0} = \Delta\phi_j(t_1^+) = \Delta\phi_j(1 \cdot \Delta t^+)$. Коэффициент чувствительности $\Delta\phi_{j_0}$ достигнет своего наибольшего значения при таком шаге Δt^+ , при котором значение $\Delta\phi_j(\Delta t^+)$ макси-

мально, т.е. Δt^+ — точка максимума функции $\Delta\phi_j(t^+)$. Обозначим этот оптимальный шаг через $\Delta t_{опт}^+$. Оптимальные шаги для датчиков № 1, 2, 3 равны 0,04; 0,007 и 0,017 соответственно. Решение задачи может быть устойчивым при шаге $\Delta t_{обр}^+$, немного меньшем $\Delta t_{опт}^+$. Если в качестве левой границы интервала устойчивости взять такое значение $t_{л.уст}^+$, при котором функция чувствительности $\Delta\phi_j(t^+)$ равна 0,9 от своего максимального значения, то при $\Delta t_{обр}^+ = t_{л.уст}^+$ решение обратной задачи по показаниям датчика № 2 остается устойчивым, а для датчика № 3 — проявляется неустойчивость (при $\Delta t_{обр}^+ = 0,013$ решение устойчиво, а при $\Delta t_{обр}^+ = 0,012$ решение в десятки раз отличается от истинного). Исходя из этого, в качестве $\Delta t_{кр}^+$ нужно брать $\Delta t_{опт}^+$. Увеличивать временной шаг $\Delta t_{обр}^+ > \Delta t_{опт}^+$ без необходимости не нужно, т.к. при увеличении шага по времени решение закругляется.

Погрешности измерений. Пусть шаг по времени $\Delta t_{обр}^+ = 0,01$. При таком шаге устойчивостью будет обладать только решение, получаемое по показаниям датчика № 2 (см. рис. 2). Внесем в замеры концентрации ошибку с параметром $\delta = 0,03$. Восстановленное решение в этом случае будет колебаться вокруг искомой интенсивности.

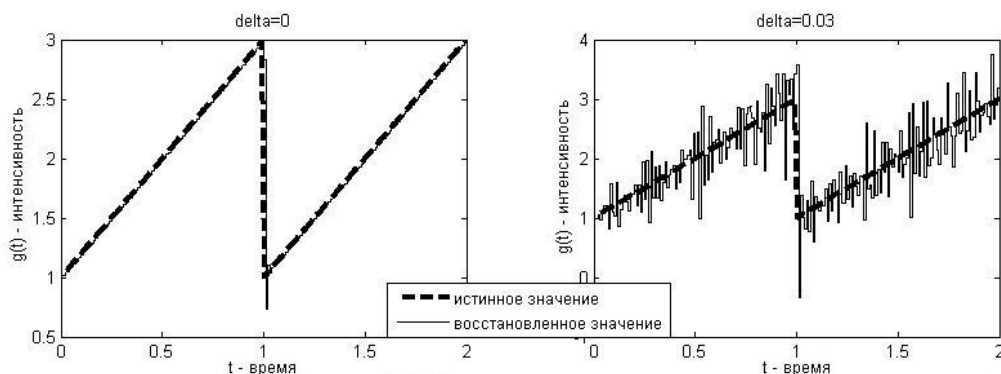


Рис. 2. Восстановление интенсивности без погрешности измерений и при наличии погрешности измерений

Для уменьшения колебаний решения можно выполнить предварительную фильтрацию [5] входных данных (измеренных концентраций) и пост-фильтрацию выходных данных (восстановленных значений интенсивности). Результаты предварительной фильтрации и пост-фильтрации показаны на рис. 3. Фильтрация производилась с помощью рекурсивного фильтра $y_i = \frac{y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1}}{4}$.

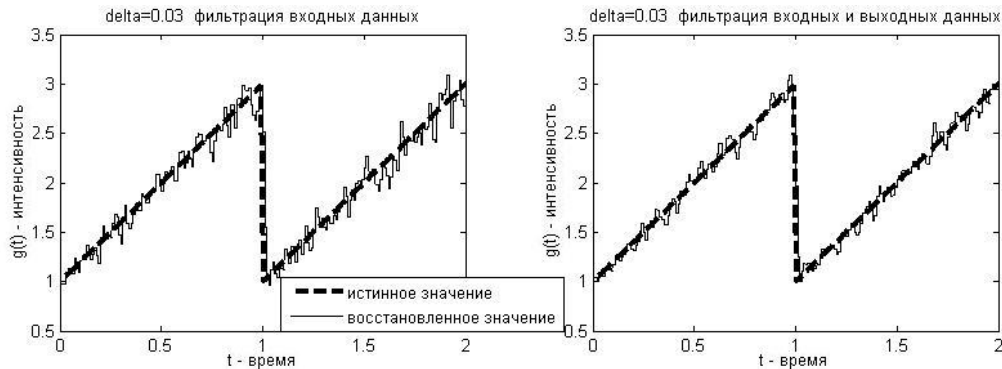


Рис. 3. Восстановление интенсивности при наличии погрешности измерений при использовании фильтрации данных

Погрешность восстановления интенсивности. Для оценки близости восстановленного решения к истинному будем использовать

$$\Delta g_{abc} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (g_{n(расч)} - g_{n(ист)})^2}{N}} \quad \text{— абсолютную среднеквадратичную погрешность и}$$

$$\Delta g_{отн} = \frac{\Delta g_{abc}}{g_{cp}} = \frac{\Delta g_{abc}}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_{n(ист)}} \quad \text{— относительную среднеквадратичную погрешность.}$$

Уменьшение шага по времени. Пусть для решения обратной задачи используются данные измерений концентрации, получаемые от датчика № 1. Критический шаг для этого датчика равен $\Delta t_{кр}^+ = 0,04$, но необходимо решить задачу при более мелком шаге. Возьмем $\Delta t_{обр}^+ = 0,01$, тогда решение становится неустойчивым даже при $\delta = 0$.

Функциональная аппроксимация при условии (12). Устойчивости решения обратной задачи можно добиться, воспользовавшись формулой (13), т.е. используя несколько последующих шагов по времени.

На рис. 4 приведены результаты для $\delta = 0,01$ и $\delta = 0,03$.

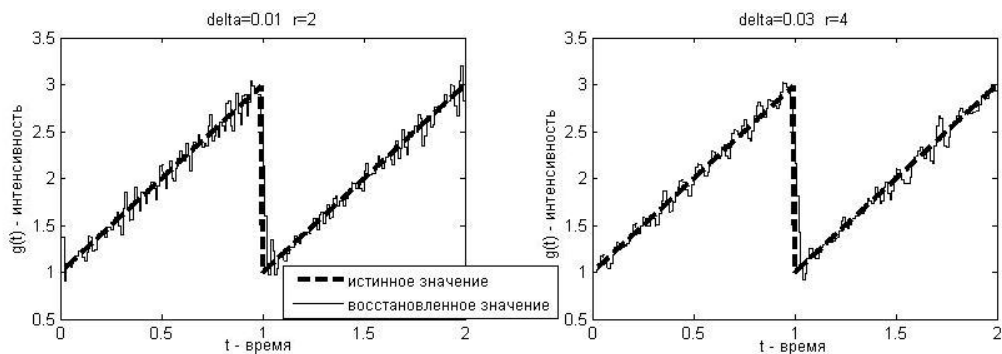


Рис. 4. Восстановление интенсивности при $\delta = 0,01$, $r = 2$ и $\delta = 0,03$, $r = 4$

В табл. 1, 2 приведены абсолютные среднеквадратичные погрешности восстановления искомой интенсивности при различных δ и r . Видно, что минимум погрешности достигается при некотором r , лежащем в пределах от 3 до 7.

Таблица 1. Зависимость Δg_{abc} от r и δ для датчика № 1 при $\Delta t_{обр}^+ = 0,01$

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δg_{abc} при $\delta = 0.01$	∞	0.137	0.109	0.101	0.099	0.104	0.111	0.121	0.132	0.144
Δg_{abc} при $\delta = 0.03$	∞	0.307	0.184	0.136	0.114	0.115	0.117	0.125	0.136	0.148
Δg_{abc} при $\delta = 0.05$	∞	0.494	0.270	0.184	0.145	0.131	0.132	0.136	0.144	0.150

Таблица 2. Зависимость Δg_{abc} от r и δ для датчика № 3 при $\Delta t_{обр}^+ = 0,01$.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δg_{abc} при $\delta = 0.01$	10^{26}	0.102	0.093	0.096	0.103	0.114	0.125	0.137	0.150	0.163
Δg_{abc} при $\delta = 0.03$	10^{26}	0.137	0.119	0.111	0.113	0.118	0.129	0.139	0.152	0.163
Δg_{abc} при $\delta = 0.05$	10^{26}	0.193	0.149	0.132	0.128	0.127	0.136	0.145	0.156	0.167

Выводы. На ряде методических задач проведены многочисленные квазиреальные эксперименты. Построены устойчивые численные приближения к искомым интенсивностям для источников различных типов (точечных, линейных, площадных, распределенных), в том числе и при наличии ошибок измерений в датчиках ($\delta_j = 0,01 \div 0,03$). Если $\Delta t_{обр}^+ > \Delta t_{кр}^+$, то имеет место эффект шаговой регуляризации, но возможности ее ограничены, т.к. для некоторых датчиков $\Delta t_{кр}^+$ может быть довольно большим и восстановленное решение загроубляется. Желание повысить точность восстановления интенсивности, уменьшая шаг по времени, переносит $\Delta t_{обр}^+$ в область неустойчивости решения обратной задачи. В этом случае, при использовании функциональной аппроксимации с несколькими последовательными шагами по времени, достигается устойчивость решения. Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать вывод, что для каждой пары чисел $\Delta t_{обр}^+ / \Delta t_{кр}^+$ и δ можно подобрать r , при котором Δg_{abc} и $\Delta g_{отн}$ будут минимальны.

В рассмотренном методе информация о замерах концентрации поступает с датчиков последовательно, что позволяет организовать on-line контроль за выбросами загрязнений из источника в атмосферу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (проект № 06–01–96643).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
3. Тихонов А. Н. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. — М.: Наука, 1983.
4. Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч., мл. Некорректные обратные задачи теплопроводности: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.
5. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры: Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1980.

**ON-LINE MONITORING OF ATMOSPHERIC POLLUTION SOURCE ON THE
BASE OF SERIAL FUNCTIONAL APPROXIMATION**

Chubatov A. A., Karmazin V. N.

The approach given in this work helps to organize on-line monitoring of intensity of pollution emissions into the atmosphere. Step-by-step regularization and serial functional approximation are used to solve the inverse problem