

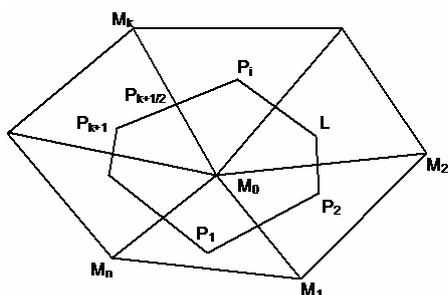
# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ НА ОСНОВЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Елизарова Т. Г., Жериков А. В., Калачинская И. С.

*Предложен метод численного решения квазигидродинамических уравнений на неструктурированных треугольных сетках. В качестве сетки была использована триангуляция Делоне. Система уравнений аппроксимировалась с помощью метода конечных объемов. Граница области аппроксимировалась прямоугольными треугольниками. На основе данного алгоритма была разработана программа и проведена серия тестов, результаты которых показали, что данный алгоритм дает результаты, которые хорошо совпадают с результатами расчетов, выполненных на регулярных сетках*

**Введение.** При численном моделировании течений в областях со сложными границами не всегда удобно использовать прямоугольные пространственные сетки. В данной работе предлагается обобщение численных алгоритмов на случай неструктурированных, или нерегулярных, сеток. Использование таких сеток представляется перспективным для расчета течений в областях со сложной границей. Кроме того неструктурированные сетки дают свободу в выборе расположения узлов, что позволяет детально аппроксимировать зоны течения с сильными градиентами.

**Построение сетки.** Обозначим совокупность узлов сетки через  $M = \{M_i \in R^2, i = 1 \dots n\}$ . Таким образом, сетку можно представить как систему треугольников с вершинами  $M_i$ . Пусть величины  $\vec{u}, p, T$  заданы в узлах сетки  $M_i$ . Для построения разностной схемы будем использовать метод конечного объема, при этом разностная аппроксимация уравнений строится на основе приближенного интегрирования уравнений по некоторому объему, который называется контрольным.



**Рис. 1.** Контрольный объем

Для каждого узла  $M_i$  треугольной сетки строится контур  $L$  (рис. 1), состоящий из точек  $P_k$  – точек пересечения перпендикуляров, восстановленных к серединам граней соседних треугольников, содержащих данный узел. Обозначим число узлов контура  $L$  через  $K$  (т.к. расчетная сетка является нерегулярной, то число  $K$  не фиксировано). Область, ограниченная этим контуром, представляет собой расчетную ячейку – контроль-

ный объем. А соседние узлы образуют шаблон точки  $M_0$ , на котором производится аппроксимация уравнений.

Для построения контрольного объема оказывается удобным использовать сетки, удовлетворяющие принципу триангуляции Делоне (исключением является аппроксимация границы, где этот принцип не удовлетворяется). В таких сетках треугольники построены так, что в круг, описанный около треугольника, не попадает ни одного узла, отличного от вершин указанного треугольника.

Значение величины  $f$  в точках  $P_k$  вычисляется по формуле:

$$f_{P_k} = \alpha_1 f_{M_0} + \alpha_2 f_{M_k} + \alpha_3 f_{M_{k+1}}, \quad (1)$$

где коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x_{P_k} = \alpha_1 x_{M_0} + \alpha_2 x_{M_k} + \alpha_3 x_{M_{k+1}} \\ y_{P_k} = \alpha_1 y_{M_0} + \alpha_2 y_{M_k} + \alpha_3 y_{M_{k+1}} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

**Аппроксимация уравнений.** Запишем систему КГД уравнений в декартовых координатах  $(x, y)$  в безразмерном виде:

$$-\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{1}{\tau} u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{\tau} u_y \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\Pi_{xx}^{NS})}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi_{yx}^{NS})}{\partial y} + 2 \frac{\partial(u_x \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_y \omega_x)}{\partial y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial(u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial(\Pi_{xy}^{NS})}{\partial x} + \frac{\partial(\Pi_{yy}^{NS})}{\partial y} + \frac{\partial(u_y \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_x \omega_y)}{\partial x} + 2 \frac{\partial(u_y \omega_y)}{\partial y} \quad (4)$$

$$\omega_x = \tau \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \omega_y = \tau \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

Компоненты навье-стоксовского тензора вязких напряжений  $\Pi^{NS}$  имеют вид

$$\Pi_{xx}^{NS} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \Pi_{yx}^{NS} = \Pi_{xy}^{NS} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \Pi_{yy}^{NS} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

Запишем уравнения (3), (4) в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \text{div} \vec{W} = \vec{F}, \quad (5)$$

где введено обозначение  $\text{div} \vec{W} = (\text{div} W_1; \text{div} W_2; \text{div} W_3)^T$ . Далее все операции с  $\vec{W}$  осуществляются покомпонентно.

В соответствии с методом конечного объема, проинтегрируем (5) по контрольному объему и воспользуемся формулой Грина:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{KO}} \vec{V} dS - \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \int_{S_{KO}} \vec{F} dS \quad (6)$$

здесь  $S_{KO}$  – площадь контрольного объема,  $L$  – ограничивающий его контур,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к контуру  $L$ .

Далее к первому слагаемому в (6) применим формулу среднего значения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} - \frac{1}{S_{KO}} \oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \vec{F}$$

Аппроксимируем контурный интеграл следующим образом:

$$\oint_L (\vec{W} \cdot \vec{n}) dl = \sum_k (W_x n_x + W_y n_y) \Big|_{P_{k+1/2}} L_k$$

здесь значения  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $n_x$ ,  $n_y$  вычисляются в серединах  $P_{k+1/2}$  отрезков  $L_k = \text{dist}(P_k, P_{k+1})$ , составляющих контур  $L$ . Итак, заменяя производную по времени соответствующей разностной аппроксимацией, получим разностную формулу для метода конечного объема:

$$\hat{V}_i = V_i + \frac{\Delta t}{S_{KO}} \sum_k (W_x n_x + W_y n_y) \Big|_{P_{k+1/2}} L_k + \Delta t F_i \quad (7)$$

При расчете по этой формуле потребуются значения частных производных по  $x$  и  $y$  от скорости, давления и температуры в точках  $P_{k+1/2}$ . Значения газодинамических величин в этих точках определяются как средние между значениями на концах. Также при расчете по данной формуле понадобятся значения газодинамических величин в точках  $P_k$ . Эти значения определяются по формуле (1).

**Аппроксимация частных производных.** Рассмотрим аппроксимацию частных производных в точках  $P_{k+1/2}$  через производные по направлениям (рис. 2):

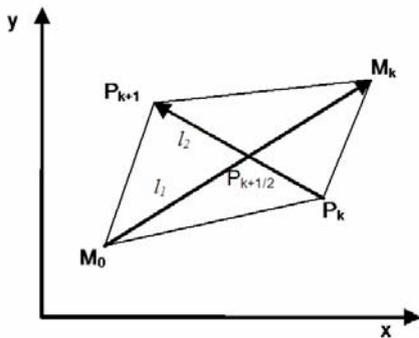


Рис. 2. Аппроксимация частных производных

Запишем частную производную в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial x} = \frac{f_{M_k} - f_{M_0}}{|l_1|} \sin \alpha_2 - \frac{f_{P_{k+1}} - f_{P_k}}{|l_2|} \sin \alpha_1 = (f_{M_k} - f_{M_0}) a_x - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) b_x \quad (8)$$

где

$$a_x = \frac{|l_2| \sin \alpha_2}{|l_1| |l_2|} = \frac{l_{2y}}{|l_1| |l_2|}, \quad b_x = \frac{|l_1| \sin \alpha_1}{|l_1| |l_2|} = \frac{l_{1y}}{|l_1| |l_2|}, \quad (9)$$

$\alpha_i$  – угол между вектором  $l_i$  и положительным направлением оси OX.

Аналогично получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (f_{M_k} - f_{M_0}) a_y - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k}) b_y, \quad (10)$$

где

$$a_y = -\frac{l_{2x}}{|l_1| |l_2|}, \quad b_y = -\frac{l_{1x}}{|l_1| |l_2|}. \quad (11)$$

**Аппроксимация граничных условий.** Основная идея аппроксимации граничных условий – это использование так называемых фиктивных узлов. Построим на границе области сетку таким образом, чтобы выполнялись следующее условие: граница расчетной области должна проходить по границам контрольных объемов внутренних узлов и при том только по одному отрезку из контура контрольного объема каждого фиктивного узла. Под контуром контрольного объема фиктивной точки подразумевается контур области, построенной аналогично контрольному объему внутренней точки.

Для того чтобы данное условие было выполнено, аппроксимируем границу прямоугольными треугольниками. Участки границы расчетной области можно разделить на следующие три типа: прямой отрезок (I); внешний угол (II); внутренний угол (III) (рис. 3). Главное требование при данном построении треугольников – это чтобы граница расчетной области проходила через середины отрезков  $B_i M_i$ .

**Аппроксимация уравнения Пуассона.** Для аппроксимации частных производных в узлах сетки будем использовать формулу Грина для контрольного объема (рис. 1):

$$\iint_{KO} \operatorname{div} \vec{A} dx dy = \int_L (\vec{A}, \vec{n}) dl$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к контуру  $L$ ,  $\vec{A} = \{P, Q\}$  – некий вектор.

Далее из этой формулы получим:

$$\iint_{KO} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_L f n_x dl = \sum_k f_{P_{k+1/2}} n_{x P_{k+1/2}} L_k \quad (2)$$

$$\iint_{KO} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_L f n_y dl = \sum_k f_{P_{k+1/2}} n_{y P_{k+1/2}} L_k \quad (3)$$

где  $P_{k+1/2}$  – середины отрезков  $L_k = \text{dist}(P_k, P_{k+1})$ , составляющих контур  $L$ .

Теперь рассмотрим уравнение Пуассона (2). Запишем его в виде:

$$-\Delta f = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y}$$

Проинтегрируем это уравнение по контрольному объему и вычислим значение левой части, используя (12)-(13):

$$-\iint_{KO} \Delta f \, dx dy = -\sum_k \left[ \frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y \right]_{P_{k+1/2}} L_k,$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе контрольного объема. Далее, воспользовавшись (8) и (10), после преобразования получим:

$$-\iint_{KO} \Delta f \, dx dy = \sum_k \left[ (f_{M_k} - f_{M_0})(a_y l_{2x} - a_x l_{2y}) - (f_{P_{k+1}} - f_{P_k})(b_y l_{2x} - b_x l_{2y}) \right]_{P_{k+1/2}}$$

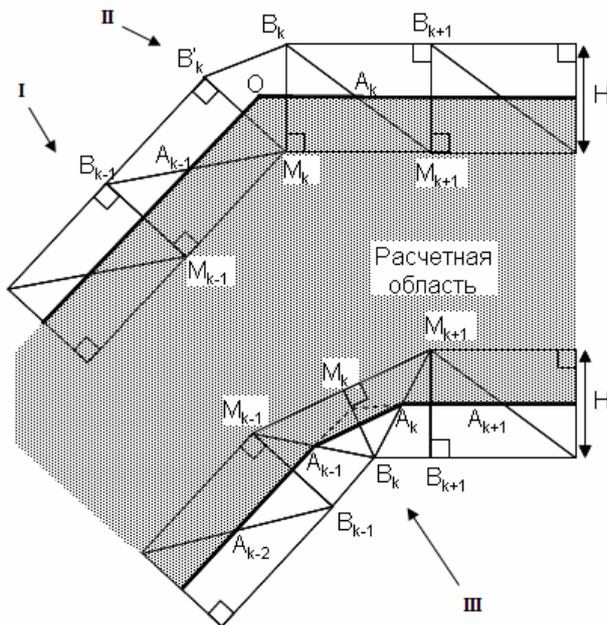


Рис. 3. Аппроксимация границы расчетной области

Вычислим отдельно коэффициенты, используя (9), (11):

$$a_y l_{2x} - a_x l_{2y} = -\frac{l_{2x}^2 + l_{2y}^2}{|l_1| |l_2|} = -\frac{|l_2|}{|l_1|}, \quad b_y l_{2x} - b_x l_{2y} = -\frac{(l_1, l_2)}{|l_1| |l_2|} = 0, \quad \text{т.к. } l_1 \perp l_2.$$

В результате преобразований левая часть уравнения Пуассона выглядит так:

$$-\iint_{KO} \Delta f \, dx dy = \sum_k (f_{M_0} - f_{M_k}) \frac{|l_2|}{|l_1|} \Big|_{P_{k+1/2}} \quad (4)$$

**Вычислительный алгоритм.** В начальный момент времени значения газодинамических величин полагались равными нулю. Алгоритм расчета состоял из следующих шагов:

- 1). Вычисление полей скорости и температуры в фиктивных узлах, используя граничные условия;
- 2). Определение поля давления путем решения методом Холецкого системы линейных алгебраических уравнений (14), дополненных граничными условиями;
- 3). Нахождение поля скорости на следующем слое по времени с помощью (7);
- 4). Переброска массивов и возврат к п. 1).

**Течение в канале с уступом.** Рассматривается течение несжимаемой изотермической жидкости в плоском канале с уступом, имеющим сложный профиль (рис. 4). Жидкость втекает в канал слева со скоростью  $U_0$  и свободно вытекает справа. Нижняя граница канала является твердой, а верхняя – свободной. Для невысоких чисел Рейнольдса  $Re$  такое течение является стационарным.

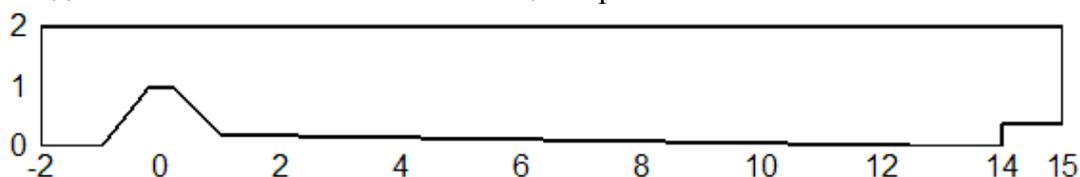


Рис. 4. Профиль канала

Задача решалась при числах Рейнольдса  $Re = 10, 100$  и  $500$  на сетке с 23925 узлами и 46862 треугольниками.

При числе Рейнольдса  $Re=10$  в канале сразу за уступом образуется один стационарный вихрь, который по размерам занимает около трети всей длины канала (рис. 5).

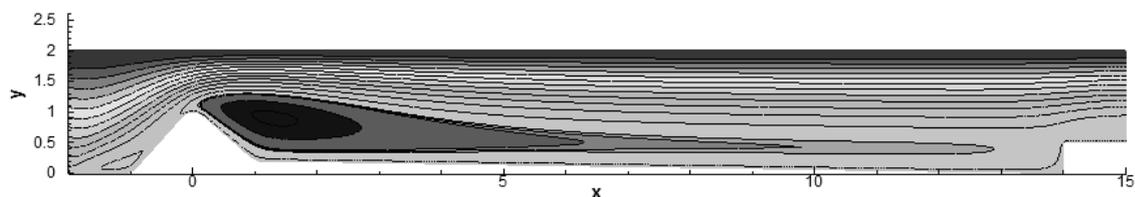


Рис. 5. Функция тока для  $Re=10$

При  $Re=100$  вихрь уже занимает практически всю область канала. Но он также является стационарным.

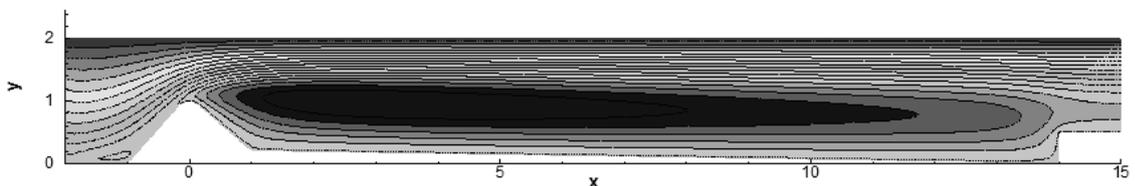


Рис. 6. Функция тока для  $Re=100$

При числе Рейнольдса  $Re=500$  течение перестает быть стационарным и можно наблюдать как вихри, образовываясь приблизительно в середине канала, отрываются, пе-

решаются вправо и покидают расчетную область (рис. 7-9). Данное течение является квазипериодическим, т.е. не имеет четкого периода.

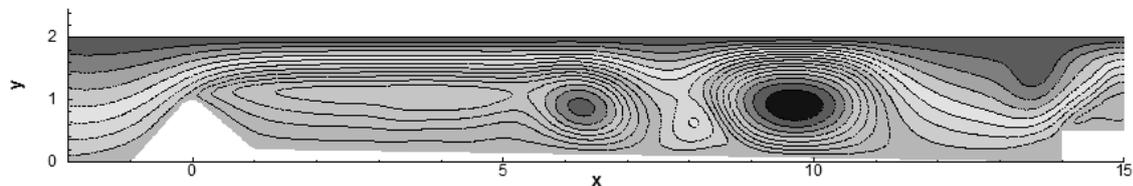


Рис. 7. Функция тока для  $Re=500$  в момент времени  $t = 121$ .

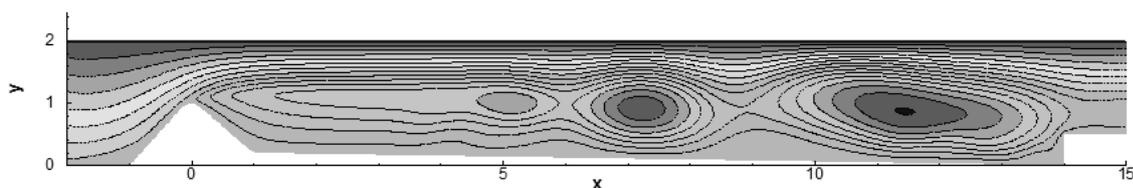


Рис. 8. Функция тока для  $Re=500$  в момент времени  $t = 125$

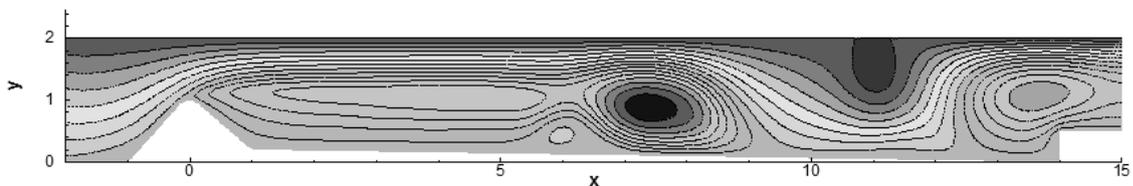


Рис. 9. Функция тока для  $Re=500$  в момент времени  $t = 128$

**Заключение.** Предложен вариант аппроксимации квазигидродинамических уравнений на неструктурированной треугольной сетке. Использование таких сеток позволяет существенно снизить зависимость методов решения задач гидродинамики от сложности геометрии области расчета. В качестве примера возможностей предложенного метода аппроксимации был проведен расчет течения несжимаемой жидкости в канале, имеющим сложную структуру дна. Результаты расчета показали, что предложенный метод может быть использован для моделирования течений жидкости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елизарова Т. Г., Серегин В. В.* Численное решение квазигазодинамических уравнений на треугольных сетках // Вестник Московского университета, серия 3. Физ. Астрономия. 2005. № 4.
2. *Елизарова Т. Г., Шеретов Ю. В.* Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 2.
3. *Шеретов Ю.В.* Квазигидродинамическая модель течений электропроводной вязкой жидкости в электромагнитном поле // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1997. С. 155-169.
4. *Шеретов Ю.В.* Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 2000.
5. *Шеретов Ю.В.* О точных решениях квазигидродинамических уравнений. // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун-т, 1998. С. 213-241.

## **FLOW MODELING IN CHANNEL WITH COMPLEX PROFILE BASED ON QUASI-HYDRO-DYNAMIC EQUATIONS**

**Elizarova T. G., Zherikov A. V., Kalachinskaya I. S.**

*A new flow modeling method on unstructured grid was proposed. This method uses quasi-hydro-dynamic equations as a basis system. The finite volume method was used for solving these equations. The Delaunay triangulation was used for constructing mesh. This proposed method was tested in modeling of incompressible flow through a channel with complex profile. Acquired results show that the proposed method could be used in flow modeling in unstructured grid*