

# НЕПРЕРЫВНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ВЫБОРКОЙ С НЕРАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ: ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Постников Е. Б.

*Представлены два алгоритма проведения непрерывного вейвлет-преобразования с вейвлетом Морле. Первый представляет собой решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, в которой преобразуемый сигнал играет роль начальных условий. Второй позволяет исследовать влияние базисной частоты путем диффузионного сглаживания начальных данных, модулированных гармоническими функциями. Эти подходы проиллюстрированы анализом хаотических колебаний связанных систем Ресслера*

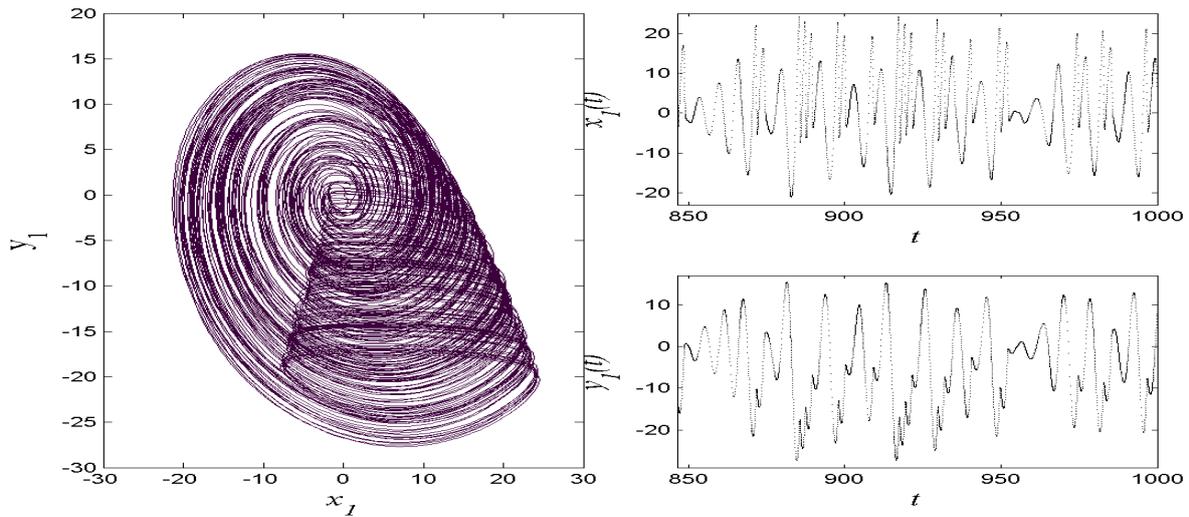
**Введение.** Комплексное непрерывное вейвлет-преобразование в настоящее время является одним из наиболее активно развивающихся методов гармонического анализа нестационарных сигналов [1, 2]. Как правило, методы его численной реализации работают с данными, представленными на сетке с равноотстоящими узлами, так как их использование позволяет применять наиболее быстрые и эффективные для численных расчетов алгоритмы (например, быстрого преобразования Фурье, семейства фильтров). В то же время, в задачах обработки сигналов, порождаемых сложными динамическими системами, в частности, в хаотическом режиме, зачастую данные представлены на существенно неравномерной сетке. Это касается не только экспериментальных данных, требующих обработки, но и решений систем дифференциальных уравнений, так как наибольшую точность при разумном времени расчета достигается при использовании схем дискретизации с адаптивным переменным шагом.

Рассмотрим в качестве примера численное решение системы дифференциальных уравнений, представляющих собой два связанных осциллятора Ресслера:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + \alpha_0 y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c),\end{aligned}\tag{1}$$

которые при значениях параметров  $\omega_1 = 0.98$ ,  $\omega_2 = 1.03$ ,  $\varepsilon = 0.05$ ,  $a = 0.22$ ,  $p = 0.1$ ,  $c = 8.5$  проявляет хаотическое поведение. Интерес к поведению вейвлет-преобразования (1) связан с тем, что в работах [3, 4] было высказано наблюдение, что фазы вейвлет-образов этих двух осцилляторов являются синхронизированными при определенных значениях масштабов, в то время как фазы, заданные классическим способом, как  $\phi_{1,2} = \arctg(y_{1,2}/x_{1,2})$  такого поведения не проявляют.

На рис. 1 представлено решение системы (1) при помощи алгоритма Адамса с адаптивным переменным шагом (фазовый портрет на временном интервале от 0 до 1000, а также выборки, которые будут анализироваться далее). В качестве начальных условий всем зависимым переменным присвоено единичное значение. Видно, что хаотичность решения приводит к существенно неоднородному распределению временных отсчетов.



**Рис. 1.** Фазовый портрет и колебания переменных для одного из связанных осцилляторов Рессера (1)

**Вейвлет-преобразование как решение задачи Коши.** Для проведения локального спектрального анализа наиболее удобно использовать в качестве вейвлета  $\psi$  в непрерывном вейвлет-преобразовании

$$w(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) \frac{dt}{a},$$

вейвлет Морле, т.е. гармоническую функцию, модулированную гауссианой. Здесь звездочка обозначает комплексное сопряжение, а множитель  $1/a$  добавлен, чтобы выполнялось условие амплитудной нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi \left( \frac{x-b}{a} \right) \right| \frac{dx}{a} = 1.$$

Таким образом, явная формула принимает вид:

$$w(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega_0 \frac{t-b}{a}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t-b}{a} \right)^2} dt. \quad (2)$$

В статье (5) было показано, что  $w(a, b)$  может рассматриваться как решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial a} = a \frac{\partial^2 w}{\partial b^2} - i\omega_0 \frac{\partial w}{\partial b}. \quad (3)$$

с начальным условием  $w(0, b) = f(b) \sqrt{2\pi} \exp(-\omega_0^2/2)$ . Это следует из того, что (2), как можно показать непосредственной подстановкой, удовлетворяет (3) при всех значениях  $a$  и  $b$ , а при  $a \rightarrow 0$  имеет место предельный переход ядра преобразования к дельта-функции Дирака. А именно, формулу (2) можно переписать в виде

$$w(a, b) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{e^{-\frac{(t-(b+i\omega_0 a))^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}} dt.$$

Тогда по свойству гауссианы

$$\delta(\xi) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}} \text{ и } \lim_{a \rightarrow 0} w(a, b) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-b) dt = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega_0^2}{2}} f(b).$$

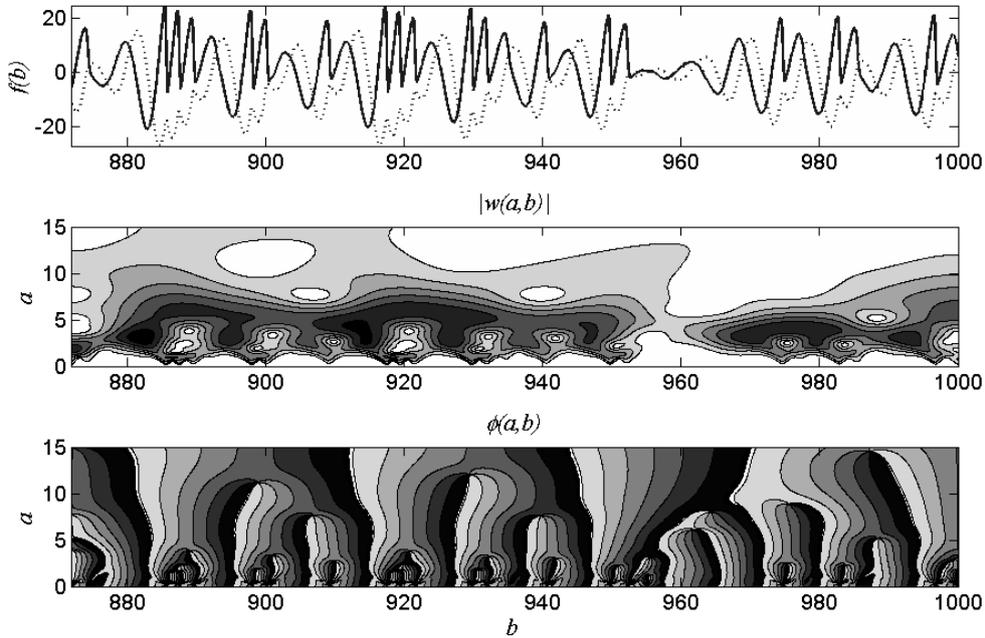
Фактически, вейвлет Морле можно интерпретировать как функцию Грина уравнения (3).

Такой алгоритм удобен для непосредственного численного расчета преобразования на сетке с неравноотстоящими узлами, так как решение (3) сводится к аппроксимации производных конечными разностями, точность которой достаточно слабо зависит от неравномерности сетки, а программирование алгоритм не зависит вовсе. Кроме того, наличия диффузионного сглаживающего члена в (3) обеспечивает высокую устойчивость разностного алгоритма [6]. В [7] также показано, что адаптация алгоритма Скила-Берзинса к уравнению (3) принципиально позволяет достичь наибольшей возможной скорости расчета, с числом операций  $O(N_a N_b)$  на неравномерной сетке, что превышает для больших выборок скорость выполнения вейвлет-преобразования с использованием быстрого преобразования Фурье (FFT) в качестве промежуточного этапа, равную  $O(N_a N_b \log N_b)$  и применимую только к выборке с равноотстоящими узлами, число которых кратно степени двойки.

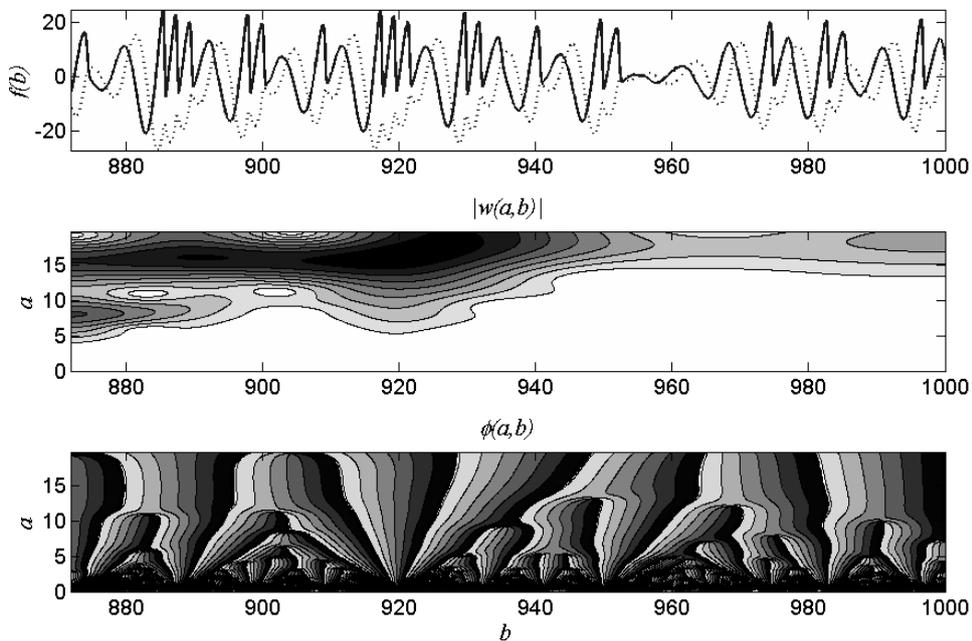
На рис. 2 и 3 представлены результаты вейвлет-преобразования функции  $f(t) = x_1(t) + iy_1(t)$  (действительная и мнимая части показаны сплошной и пунктирной линиями, соответственно) при  $\omega_0 = \pi$  (рис. 2) и  $\omega_0 = 2\pi$  (рис. 3). На графиках модуля  $|w(a, b)|$  и фазы  $\phi(a, b)$  вейвлет-преобразования более темные участки соответствуют большему значению. Из сравнения двух графиков модуля видно, что увеличение базисной частоты приводит к заметной регуляризации модуля вейвлет-преобразования: основная линия максимума изломана при меньшей базисной частоте, при этом локализация возмущений очевидно связана с влиянием мелкомасштабных колебаний (вертикальные линии, исходящие из мелкомасштабных линий максимума); при  $\omega_0 = 2\pi$  мелкомасштабные максимумы исчезают, одновременно, основная линия максимума выпрямляется, что можно интерпретировать как выявление гармоник, достаточно стабильной на больших промежутках времени.

Однако следует заметить, что применение описанного метода при больших базисных частотах начинает приводить к заметной погрешности. Качественно это можно объяснить следующим образом. Линия максимума для чистой гармоник с периодом  $T$  приходится на масштаб  $a = T\omega_0/2\pi$  (это, кстати, наглядно можно видеть на рис. 3, на котором линия основного максимума сдвинута вдвое выше по масштабам по сравнению с рис. 2). Однако из рис. 2 и 3 видно, что краевые эффекты начинают сказываться на фазе при масштабах, больших характерного периода сигнала. Поэтому при  $\omega_0 > 2\pi$ , решение, строящееся последовательно от меньших масштабов к большим начинает накапливать ошибку. Заметим однако, что влияние краевых эффектов на фазу вейвлет-преобразования не является специфической особенностью алгоритма, основанного на решении дифференциальных уравнений, см. рис. 4, где преобразование с

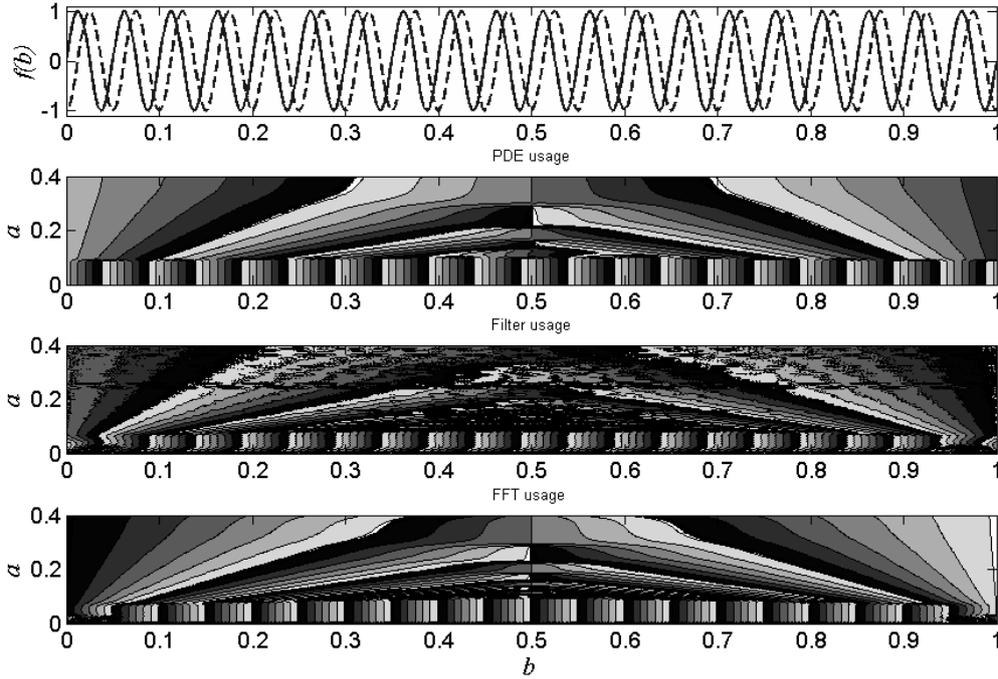
$\omega_0 = 2\pi$  чистой гармонике, периодической на данном интервале, выполнено при помощи промежуточного FFT и на основе использования фильтров (где ошибка максимальна).



**Рис. 2.** Участок фазового портрета, приведенный на рис. 1, а также модуль и фаза его вейвлет-преобразования при базисной частоте  $\omega_0 = \pi$



**Рис. 3** Участок фазового портрета, приведенный на рис. 1, а также модуль и фаза его вейвлет-преобразования при базисной частоте  $\omega_0 = 2\pi$



**Рис. 4.** Чистая комплексная гармоника (действительная часть изображена сплошной линией, мнимая – штриховой) и фаза ее вейвлет-преобразования, рассчитанная тремя методами

**Вейвлет-преобразование как решение задачи Коши при фиксированном масштабе и переменной базисной частоте.** Рассмотрим теперь подробнее, как изменение базисной частоты влияет на свойства вейвлет-образа. Оказывается [8], что ту задачу также можно решить с позиций решения диффузионного дифференциального уравнения. При этом метод не использует решения для меньших масштабов, т.е. свободен от погрешности, описанной выше. Для удобства интерпретации введем обозначение  $\nu = \omega_0/\pi a$ . При таком выборе комбинации  $\nu$  играет роль частотной переменной (обратного приведенного масштаба). В данных обозначениях (2) принимает вид:

$$w = e^{i\pi\nu b} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)e^{-i\pi\nu t}] \frac{e^{-\frac{(t-b)^2}{4\omega_0^2 \frac{1}{2\pi^2\nu^2}}}}{\sqrt{4\pi\omega_0^2 \frac{1}{2\pi^2\nu^2}}} dt. \quad (4)$$

Искомое преобразование определяется как  $w(a,b) = u(\nu(a, \omega_0), b) \exp(i\pi\omega_0 b)$  то есть (при данном фиксированном  $\nu$ ), как гармоническое колебание с нестационарной комплексной амплитудой. При этом  $u(\tau, b)$  имеет вид интегрального преобразования с диффузионным ядром, или, что эквивалентно, решения простейшего уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (2\pi^2\nu^2)^{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial b^2}, \quad (5)$$

взятого в "момент времени"  $\tau = \omega_0^2$  с начальным условием, заданным для каждого значения параметра  $\nu$  как  $u(0, b) = f(b) \exp(-i\pi\nu b)$ .

С точки зрения практических вычислений, (5) представляет собой систему двух независимых уравнений – для действительной и мнимой частей  $u(\tau, b)$ , которые могут решаться независимо и параллельно, с начальными условиями

$$\operatorname{Re} u(0, b) = \operatorname{Re} f(b) \cos(\pi \nu b) + \operatorname{Im} f(b) \sin(\pi \nu b),$$

$$\operatorname{Im} u(0, b) = \operatorname{Im} f(b) \cos(\pi \nu b) - \operatorname{Re} f(b) \sin(\pi \nu b).$$

Искомый модуль вейвлет-преобразования определяется непосредственно через решение соответствующего дифференциального уравнения как

$$|w(a, b)| = |u| = \sqrt{(\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2},$$

а фаза:

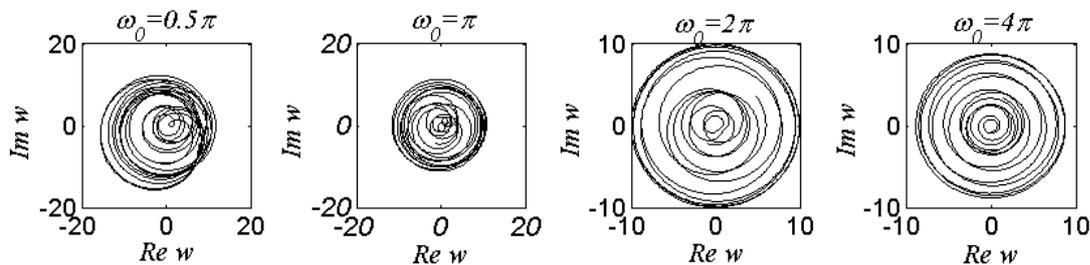
$$\phi(a, b) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} u \sin(\pi \nu b) + \operatorname{Im} u \cos(\pi \nu b)}{\operatorname{Re} u \cos(\pi \nu b) - \operatorname{Im} u \sin(\pi \nu b)}. \quad (6)$$

В рамках полученного представления непрерывное вейвлет-преобразование с вейвлетом Морле имеет наглядный смысл диффузионного сглаживания исходной функции, промодулированной гармонической. Как известно, такой процесс приводит к последовательному удалению из сигнала гармоник, начиная со старшей, т.е. в отношении амплитуды это сводится к «размыванию» модулированной преобразуемой функцией периодической структуры начального условия. При этом заметное отличие от нуля гауссова ядра лишь на конечном интервале, центрированном в точке  $b$ , обеспечивает локальность анализа.

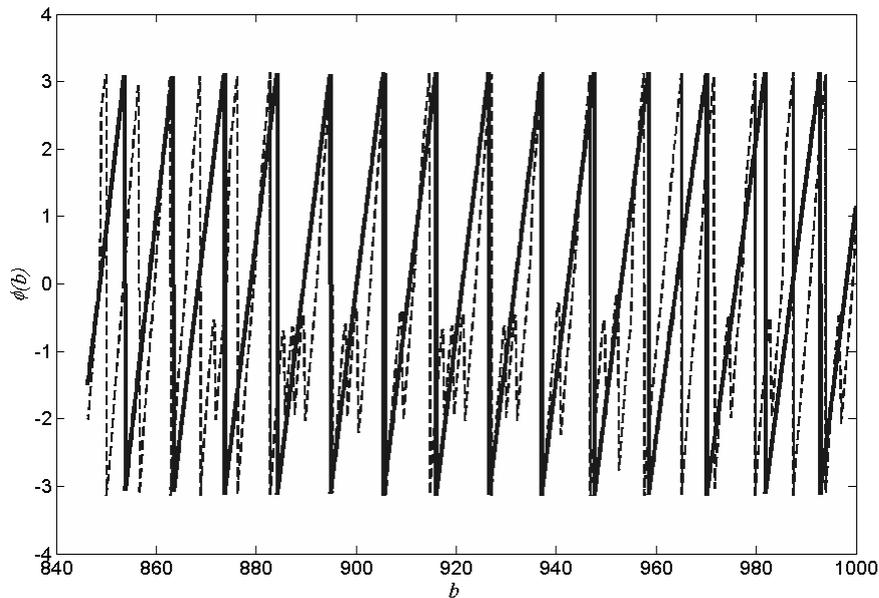
Подобное удаление гармоник приводит также к сглаживанию фазового портрета траектории динамической системы. Рассмотрим это опять на примере связанных осцилляторов Ресслера. Возьмем в качестве исследуемой функции комплексную комбинацию  $f(t) = x_1(t) + iy_1(t)$ . По свойству дельта-функции Дирака из (4) следует предел

$$\phi_1|_{\omega_0=0} = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1},$$

который совпадает с одним из стандартных определений фазы. Аналогичное выражение следует для фазы второго осциллятора и, как и следует ожидать для столь нерегулярного фазового портрета (рис. 1), они не синхронизированы. При росте  $\omega_0$  происходит удаление высших гармоник, и фазовый портрет комплексной функции, взятой при фиксированном масштабе, становится все более регулярным, см. рис. 5.



**Рис. 5.** Фазовые портреты системы Ресслера, представленные выборкой вейвлет-образа ее решения при одинаковом приведенном масштабе, но различных базисных частотах



**Рис. 6.** Фаза вейвлет-преобразования функции  $f(t) = x_1(t) + iy_1(t)$  для основной линии максимума. Штриховая линия соответствует  $\omega_0 = 0$  (исходный сигнал), сплошная –  $\omega_0 = 4\pi$

Можно заметить, что подобное выделение регулярной динамики из хаотической при помощи высокочастотной вейвлет-фильтрации отмечалось также в работе [9] на примере другого классического примера – осциллятора Дюффинга. Соответственно, фаза вейвлет-преобразования, определяемая формулой (6), также регуляризуется, см. рис. 6, и, начиная с некоторого порогового значения базисной частоты, начинает выполняться условие синхронизма  $|\phi_1(a_0, b) - \phi_2(a_0, b)| = \text{const}$  для фиксированного масштаба  $a$  и всех  $b$ . Наконец, при предельном переходе  $\omega_0 \rightarrow \infty$  ширина гауссианы также стремится к бесконечности, т.е. вейвлет-преобразование переходит в преобразование Фурье. Более детальное обсуждение в приложении к динамической системе связанных осцилляторов Ресслера см. в [8].

**Заключение.** Описанные методы проведения непрерывного преобразования с вейвлетом Морле имеют следующие преимущества: 1) алгоритмы их реализации достаточно просты и приспособлены к выборкам из произвольного числа точек, заданных на сетке с неравноотстоящими узлами; 2) ясный физический смысл решения дифференциальных уравнений в частных производных, относящихся к диффузионному типу, позволяет выявить характерные свойства вейвлет-образов функций, являющихся решениями сложных, в том числе хаотических, динамических систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.
2. Holschneider M. Wavelets: An Analysis Tool. Oxford University Press, 2005.
3. Короновский А.А., Храмов А.Е. Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79, № 7. С. 391–395.
4. Koronovskii A.A., Hramov A.E. Time scale synchronization of chaotic oscillators // Physica D. V. 206, № 3-4. P. 252-254.

5. *Постников Е.Б.* Вычисление непрерывного вейвлет–преобразования как решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, №1. С. 77–82.
6. *Skeel R.D., Berzins M.* A method for the spatial discretization of parabolic equations in one space variable // SIAM Journal on Scientific & Statistical Computing . 1990. V. 11. P. 1–32
7. *Киселев Р.В., Постников Е.Б.* Компьютерная реализация вейвлет-анализа акустических сигналов на основе алгоритма, использующего численное решение дифференциальных уравнений в частных производных // Акустические измерения и стандартизация. Электроакустика. Ультразвук и ультразвуковые технологии. Атмосферная акустика. Акустика океана. Сборник трудов XIX сессии Российского акустического общества. Т. 2. М.: ГЕОС., 2007. С. 7–9.
8. *Постников Е.Б.* О точности синхронизации вейвлетной фазы хаотических сигналов // ЖЭТФ. 2007. Т. 132, № 3. С. 742–745.
9. *Permann D., Hamilton I.* Wavelet analysis of time series for the Duffing oscillator: The detection of order within chaos // Physical Review Letters. 1992. V. 69. P. 2607 – 2610.

**THE CONTINUOUS WAVELET TRANSFORM OF SIGNALS REPRESENTED BY  
A NON-EQUISPACED SAMPLE:  
THE USAGE OF DIFFUSION DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**Postnikov E. B.**

*Two algorithms of evaluation of the continuous wavelet transform with the Morlet wavelet are presented. The first one is the solution of PDE with transformed signal, which plays a role of the initial value. The second allows to explore the influence of central frequency variation via the diffusion smoothing of the data modulated by the harmonic functions. These approaches are illustrated by the analysis of the chaotic oscillations of the coupled Roessler systems*