СИММЕТРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В ФОРМЕ БРУНОВСКОГО[1]

Яковенко Г.Н.

Многие нелинейные системы с управлением неособенным преобразованием переменных {состояние-управление} приводятся к каноническому виду Бруновского. В каноническом виде решаются различные вопросы теории управления, затем обратной заменой переменных осуществляется возврат к исходным переменным. В работе на основе этой идеологии изучаются преобразования симметрии пространства {время-состояние-управление}.

Для управляемых систем в канонической форме Бруновского [1]

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \ldots,\ \dot{x}_n = u,\ \ldots\ldots,\ \dot{z}_1 = z_2,\ \ldots,\ \dot{z}_m = w \tag{1}$$

изучаются преобразования симметрии — такие преобразования пространства "независимая переменная t, переменные состояния $x,\ \ldots,\ z$, управления $u,\ \ldots,\ w$", что в новых переменных сохраняется каноническая форма (1) [2, 3]. Работа продолжает исследование вопросов, поставленных в работах [4 — 6]. Изучаются преобразования симметрии следующего частного случая системы (1):

$$\begin{gathered}\dot{x}_i = u_i, \quad i = \overline{1,\, n},\\ \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3,\ \ldots,\ \dot{y}_{m-1} = y_m, \quad \dot{y}_m = v.\end{gathered} \tag{2}$$

Однопараметрическая группа преобразований симметрии — это группа (a — групповой параметр)

$$\begin{gathered}\hat{t} = \hat{t}(t,\, x,\, y,\, a), \qquad \hat{x}_i = \hat{x}_i(t,\, x,\, y,\, a), \qquad \hat{y}_k = \hat{y}_k(t,\, x,\, y,\, a),\\ \hat{u}_i = \hat{u}_i(t,\, x,\, y,\, u,\, v,\, a), \qquad \hat{v} = \hat{v}(t,\, x,\, y,\, u,\, v,\, a),\end{gathered} \tag{3}$$

каждое преобразование которой переводит любое решение $x(t)$, $u(t)$ $y(t)$, $v(t)$ системы (1) в её же решение $\hat{x}(\hat{t})$, $\hat{u}(\hat{t})$, $\hat{y}(\hat{t})$, $\hat{v}(\hat{t})$ [2, 3]. Другими словами — замена переменных (3) в системе (2) должна приводить к системе

$$\begin{gathered}\frac{d\hat{x}_i}{d\hat{t}} = \hat{u}_i, \quad i = \overline{1,\, n},\\ \frac{d\hat{y}_1}{d\hat{t}} = \hat{y}_2,\ \ldots,\ \frac{d\hat{y}_{m-1}}{d\hat{t}} = \hat{y}_m, \quad \frac{d\hat{y}_m}{d\hat{t}} = \hat{v}\end{gathered} \tag{4}$$

с такой же правой частью, что и у системы (2). Группе (3) соответствует оператор симметрий (генератор)

$$Y = \xi\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{n}\omega_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sigma\frac{\partial}{\partial v}, \tag{5}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00217).

коэффициенты которого вычисляются по уравнениям группы (3) следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\xi(t,\, x\, y) = \left.\frac{\partial \hat{t}(t,\, x,\, y,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \\
\eta_i(t,\, x,\, y) = \left.\frac{\partial \hat{x}_i(t,\, x,\, y,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \qquad \lambda_k(t,\, x,\, y) = \left.\frac{\partial \hat{y}_k(t,\, x,\, y,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \\
\omega_i(t,\, x,\, y,\, u,\, v) = \left.\frac{\partial \hat{u}_i(t,\, x,\, y,\, u,\, v,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0}, \\
\sigma(t,\, x,\, y,\, u,\, v) = \left.\frac{\partial \hat{v}(t,\, x,\, y,\, u,\, v,\, a)}{\partial a}\right|_{a=0}.
\end{gathered} \tag{6}
$$

Отметим, что в уравнения для переменных $\hat{t}$, $\hat{x}_i$, $\hat{y}_k$ группы (3) не входят управления u_j, v. Для коэффициентов соответственно выполняется:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \xi}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_k}{\partial u_j} = 0, \qquad i,\, j = \overline{1,\, n}, \qquad k = \overline{1,\, m}, \\
\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} = 0, \qquad i = \overline{1,\, n}, \qquad k = \overline{1,\, m}.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Запрет вызван тем, что для управлений $u_j(t)$, $v(t)$ типично иметь точки разрыва, а это влечёт при наличии управлений u_j, v в $\hat{t}$, $\hat{x}_i$, $\hat{y}_k$ к появлению разрывных траекторий $\hat{x}_i(\hat{t})$, $\hat{y}_k(\hat{t})$. Следует также иметь в виду, что $u_j(t)$, $v(t)$ могут быть недифференцируемыми функциями.

Для нахождения группы симметрий (3) сначала вычисляются коэффициенты (6) оператора симметрий (5). Для того, чтобы связать коэффициенты (6) с правой частью системы (2) представим систему (4) в виде

$$
\begin{aligned}
& d\hat{x}_i = \hat{u}_i d\hat{t}, \quad i = \overline{1,\, n}, \\
& d\hat{y}_1 = \hat{y}_2 d\hat{t},\ \ldots,\, d\hat{y}_{m-1} = \hat{y}_m d\hat{t}, \quad d\hat{y}_m = \hat{v} d\hat{t}
\end{aligned}
$$

продифференцируем по a, положим $a = 0$, с учётом (6) и того, что при $a = 0$ группа (3) определяет тождественное преобразование, получим

$$
\begin{aligned}
& d\eta_i = \omega_i dt + u_i d\xi, \quad i = \overline{1,\, n}, \\
& d\lambda_1 = \lambda_2 dt + y_2 d\xi,\ \ldots,\, d\lambda_{m-1} = \lambda_m dt + y_m d\xi, \quad d\hat{\lambda}_m = \sigma dt + v d\xi.
\end{aligned}
$$

Разделим каждое уравнение на dt, получим определяющие уравнения для ξ, η_i, λ_k, ω_i, σ:

$$
\frac{d\eta_i}{dt} = \omega_i + u_i \frac{d\xi}{dt}, \quad i = \overline{1,\, n}, \tag{8}
$$

$$
\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2 + y_2 \frac{d\xi}{dt},\ \ldots,\, \frac{d\lambda_{m-1}}{dt} = \lambda_m + y_m \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\lambda_m}{dt} = \sigma + v \frac{d\xi}{dt} \tag{9}
$$

— производная d/dt вычисляются в силу системы (2).

Теорема. *Система (8), (9) с учётом (7) имеет общее решение:*

$$
\begin{aligned}
&\xi = -\frac{\partial\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial y_2}, \qquad \lambda_1 = \mu(t,\,y_1,\,y_2) - y_2\frac{\partial\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial y_2},\\
&\lambda_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} - y_2\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial t} + y_2\frac{\partial\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial y_1},\\
&\lambda_3 = \frac{d\lambda_2}{dt} - y_3\frac{d\xi}{dt}, \quad \ldots\,, \ \lambda_m = \frac{d\lambda_{m-1}}{dt} - y_m\frac{d\xi}{dt},\\
&\sigma = \frac{d\lambda_m}{dt} - v\frac{d\xi}{dt},
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_i = \frac{d\eta_i}{dt} - u_i\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}u_j + \frac{\partial\eta_i}{\partial y_1}y_2 + \cdots + \frac{\partial\eta_i}{\partial y_m}v +{}\\
+ u_i\left(\frac{\partial^2\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial y_2\partial t} + \frac{\partial^2\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial y_2\partial y_1}y_2 + \frac{\partial^2\mu(t,\,y_1,\,y_2)}{\partial y_2^2}y_3\right),
\end{aligned} \tag{11}
$$

где $\mu(t,\,y_1,\,y_2)$ и $\eta_i(t,\,x_1,\,\ldots,\,x_n,\,y_1,\,\ldots,\,y_m)$ — произвольные функции, а производная d/dt вычисляются в силу системы (2).

☐ В уравнениях (9) сделаем замену переменных

$$\lambda_k = \theta_k + y_{k+1}\xi, \qquad k = \overline{1,\,m-1}. \tag{12}$$

Тогда первые $(m-2)$ уравнений в системе (9) примут вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, &&\frac{d\theta_2}{dt} = \theta_3,\ \ldots,\\
&\frac{d\theta_{m-3}}{dt} = \theta_{m-2}, &&\frac{d\theta_{m-2}}{dt} = \theta_{m-1}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Из условия (7) и связи (12) следует

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial v} = 0, \qquad i = \overline{1,\,m-1}. \tag{14}$$

Предположим, что функция $\theta_1(t,\,y_1,\,\ldots,\,y_r)$ зависит от первых r переменных y_k, причём переменная y_r присутствует явно. Тогда из системы (13) для функции θ_2 с учётом (14) следует равенство (производная d/dt вычисляется в силу системы (2))

$$\theta_2(t,\,y_1,\,\ldots,\,y_{r+1}) = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial\theta_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta_1}{\partial y_1}y_2 + \cdots + \frac{\partial\theta_1}{\partial y_r}y_{r+1},$$

то есть появляется явная зависимость ещё от одной переменной y_{r+1}. Аналогичные вычисления приводят к результату $\theta_k(t,\,y_1,\,\ldots,\,y_{r+k-1})$, в частности, для θ_{m-1} выполняется $\theta_{m-1}(t,\,y_1,\,\ldots,\,y_{r+m-2})$, причём переменная y_{r+m-2} присутствует явно. Вследствие (2) и (14) должно выполняться $r+m-2 \leqslant m$, то есть справедливо неравенство

$r \leqslant 2$. Таким образом, функция $\theta_1 = \mu(t,\, y_1,\, y_2)$ может зависеть только от переменных $t,\, y_1,\, y_2$, в противном случае у функций θ_k, $k = \overline{2,\, m-1}$, появится зависимость от управления v. Функция $\mu(t,\, y_1,\, y_2) = \theta_1$ — та самая произвольная функция, которая присутствует в утверждении (10), (11) теоремы. С учётом $\theta_1 = \mu(t,\, y_1,\, y_2)$ функции θ_k, $k = \overline{2,\, m-1}$ выразятся из системы (13) следующим образом

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} y_3 = \nu_2(t,\, y_1,\, y_2) + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} y_3, \\ \theta_3 &= \nu_3(t,\, y_1,\, y_2,\, y_3) + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} y_4, \\ &\vdots \\ \theta_{m-1} &= \nu_{m-1}(t,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{m-1}) + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} y_m, \end{aligned} \tag{15}$$

где ν_k — некоторые функции указанных переменных. Из соотношения (12) находим

$$\lambda_{m-1} = \theta_{m-1} + y_m \xi = \nu_{n-1}(t,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{m-1}) + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} y_m + y_m \xi,$$

из соотношений (10) —

$$\lambda_m = \frac{d\lambda_{m-1}}{dt} - y_m \frac{d\xi}{dt} =$$

$$= \frac{d\nu_{n-1}(t,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_{m-1})}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y_2}\right) y_m + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} v + v\xi + y_m \frac{d\xi}{dt} - y_m \frac{d\xi}{dt} =$$

$$= \nu_m(t,\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m) + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y_2} + \xi\right) v\,.$$

Из полученного выражения видно, что для независимости λ_m от управления v должно выполняться равенство

$$\xi = -\frac{\partial \mu}{\partial y_2} \tag{16}$$

— первое соотношение в утверждении (10) теоремы. Второе соотношение в (10) следует из $\theta_1 = \mu(t,\, y_1,\, y_2)$, равенства (16) и первого уравнения в равенствах (12). Остальные соотношения в утверждении (10) следуют из системы (9). Утверждение (11) теоремы есть следствие уравнений (8) и утверждения (10) теоремы.

Для вычисления группы симметрий (3) системы (2) следует задаться конкретными функциями $\mu(t,\, y_1,\, y_2)$ и $\eta_i(t,\, x_1,\, \ldots,\, x_n,\, y_1,\, \ldots,\, y_m)$, определить при помощи (10), (11) коэффициенты ξ, η_i, λ_k, ω_i, σ оператора симметрий (5), составить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d\hat{t}}{da} = \xi(\hat{t},\, \hat{y}), \qquad \frac{d\hat{x}_i}{da} = \eta_i(\hat{t},\, \hat{x},\, \hat{y}), \qquad \frac{d\hat{y}_k}{da} = \lambda_i(\hat{t},\, \hat{y}), \\ \frac{d\hat{u}_i}{da} = \omega_i(\hat{t},\, \hat{x},\, \hat{y},\, \hat{u},\, \hat{v}), \qquad \frac{d\hat{v}}{da} = \sigma(\hat{t},\, \hat{y},\, \hat{v}) \end{gathered} \tag{17}$$

и решить её при начальных данных [2, 3]

$$\hat{t}(0) = t, \qquad \hat{x}_i(0) = x_i, \qquad \hat{y}_k(0) = y_k, \qquad \hat{u}_i(0) = u_i, \qquad \hat{v}(0) = v. \tag{18}$$

Рассмотрим с использованием групп симметрий решение для системы (2) некоторых задач управляемости.

1. *Нуль-управляемость* — перевод начального состояния x_{i0}, y_{k0} в начало координат. Группа симметрий переводит любое решение в решение. В качестве исходного решения рассмотрим на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ нулевое решение $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$. В качестве функций $\mu(t, y_1, y_2)$, $\eta_i(t, x, y)$ в (10), (11) возьмём $\mu = (1-t)^n(c_0^1 t^n + c_1^1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}^1 t + c_n^1)$, $\eta_i = (1-t)b_i$ с неопределёнными коэффициентами c_k^1, b_i. Подстановка μ, η_i в (10), (11) определяет коэффициенты оператора симметрий (5): $\xi = 0$, $\eta_i = (1-t)b_i$, $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = d\mu/dt$, $\ldots$, $\lambda_m = d^{m-1}\mu/dt^{n-1}$, $\omega_i = -b_i$, $\sigma = d^m\mu/dt^m$. Вычисление при помощи (17), (18) группы симметрий приводит к результату

$$\begin{array}{rcl}
\hat{t} & = & t, \\
\hat{x}_i & = & x_i + a(1-t)b_i, \\
\hat{u}_i & = & u_i - ab_i, \\
\hat{y}_1 & = & y_1 + a(1-t)^m(c_0^1 t^m + c_1^1 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^1 t + c_m^1), \\
\hat{y}_2 & = & y_2 + a(1-t)^{m-1}(c_0^2 t^m + c_1^2 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^2 t + c_m^2), \\
 & \vdots & \\
\hat{y}_m & = & y_2 + a(1-t)(c_0^m t^m + c_1^m t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^m t + c_m^m), \\
\hat{v} & = & v + a(c_0^{m+1} t^m + c_1^{m+1} t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^{m+1} t + c_m^{m+1}),
\end{array} \tag{19}$$

где коэффициенты c_i^k, $k = \overline{2,\, m+1}$ определённым образом выражаются через коэффициенты c_i^1. Группа (19) переводит решение $x(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$, $v(t) \equiv 0$ в решение

$$\begin{array}{rcl}
\hat{x}_i & = & a(1-t)b_i, \\
\hat{u}_i & = & -ab_i, \\
\hat{y}_1 & = & a(1-t)^m(c_0^1 t^m + c_1^1 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^1 t + c_m^1), \\
\hat{y}_2 & = & a(1-t)^{m-1}(c_0^2 t^m + c_1^2 t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^2 t + c_m^2), \\
 & \vdots & \\
\hat{y}_m & = & a(1-t)(c_0^m t^m + c_1^m t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^m t + c_m^m), \\
\hat{v} & = & a(c_0^{m+1} t^m + c_1^{m+1} t^{m-1} + \cdots + c_{m-1}^{m+1} t + c_m^{m+1}),
\end{array} \tag{20}$$

которое, если подбором коэффициентов b_i, c_j^1 добиться выполнения $b_i = x_{i0}$, $c_m^k = y_{k0}$, при $a = 1$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ начальное состояние x_{i0}, y_{k0} переводит в начало координат. При $a \neq 1$ переводит в начало координат другие начальные состояния, расположенные на прямой, проходящей через начало координат и точку x_{i0}, y_{k0}. Полиномиальный режим (20) при решении задач управляемости для канонической формы Бруновского (1) — известный факт [7]. Недостатком этого режима является неконтролируемое по величине управление. В следующем пункте этот недостаток будет устранён.

2. *Управляемость ограниченным управлением.* В качестве функций $\mu(t,\, y_1,\, y_2)$, $\eta_i(t,\, x,\, y)$ в (10), (11) примем $\mu = (m-1)y_1 - ty_2$, $\eta_i = 0$. Подстановка в в (10), (11) приводит к коэффициентам оператора симметрий (5) $\xi = t$, $\eta_i = 0$, $\lambda_1 = (m-1)y_1$, $\lambda_2 = (m-2)y_2$, $\ldots$, $\lambda_{m-1} = y_{m-1}$, $\lambda_m = 0$, $\omega_i = -u_i$, $\sigma = -v$ и к уравнениям группы симметрий (см. (17), (18))

$$\hat{t} = te^a, \qquad \hat{x}_i = x_i,$$

$$\hat{y}_1 = y_1 e^{(m-1)a}, \qquad \hat{y}_2 = y_2 e^{(m-2)a},\ \ldots,\ \hat{y}_{m-1} = y_{m-1}e^a, \qquad \hat{y}_m = y_m,$$

$$\hat{u}_i = u_i e^{-a}, \qquad \hat{v} = ve^{-a}.$$

Если управляемый процесс на конечном интервале имеет недопустимое по величине управление, то увеличивая параметр a перейдём к другому процессу, у которого время процесса увеличится, а управление войдёт в требуемые рамки. Рассмотренная группа не меняет граничные точки, если начальная точка имеет вид $(x_{10},\, \ldots,\, x_{n0},\ 0,\, \ldots,\, 0,\ y_{m0})$. В противном случае нужно использовать группы симметрий, соответствующие другим функциям $\mu(t,\, y_1,\, y_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brunovsky P.A.* A classification of linear controllable systems // Kybernetika. 1970. V. 6. P. 176 — 188.

2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

3. *Яковенко Г.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал “Дифференциальные уравнения и процессы управления”. — 3, 2002. — С. 40 — 83. (http://www.neva.ru/journal)

4. *Яковенко Г.Н.* Решение задачи управляемости с использованием симметрии // Прикладная механика и процессы управления: Межвед. сб. науч. тр. / МФТИ. М., 1991. С. 17 — 31.

5. *Яковенко Г.Н.* Симметрии мультиуравнений // Математика. Компьютер. Образование. Вып. 14: Материалы Международной конференции. Пущино, 22 – 27 января 2007 г. / Под ред. Г.Ю. Ризниченко. — Москва-Ижевск, 2007. С. 23.

6. *Яковенко Г.Н.* Симметрии многократного интегратора // Симметрии: теоретический и методический аспекты: Сборник научных трудов II Международного семинара / Научные редакторы: Н.В. Аммосова, И.Б. Коваленко. — Астрахань: Издательство ОГОУ ДПО АИПКП, 2007. С. 75 — 80.

7. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем: Дифференциально-геометрический подход. — М.: Наука. Физматлит, 1997. — 320 с.

SYMMETRIES OF CONTROL SYSTEMS IN BRUNOVSKY FORM

Yakovenko G.N.

Many nonlinear control systems by nonsingular transformation variable {condition-control} happen to canonical Brunovsky form . The different questions dare in canonical form to theories of control, then inverse change variable is realized return to source variable. In work on base this ideology are studied transformations to symmetries space {time-condition-control}.