

О ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОГРАННИКОВ

Урываев Б. В.

Ярославский государственный университет, Россия, 150000, г. Ярославль, ул. Советская 14, E-mail: boreas@rambler.ru

Рассмотрим задачу распознавания целочисленности, суть которой состоит в следующем. Пусть M – некоторый класс выпуклых многогранников, определяемых линейными ограничениями. Пусть $M \in M$, Z – множество всех целых точек из M , $f(x) = (c, x)$ – линейная целевая функция. Требуется выяснить, выполняется ли равенство $\max_{x \in M} f(x) = \max_{z \in Z} f(z)$. Интересен вопрос о сложности в смысле Кука-Карпа [1] этой задачи для разных классов многогранников. Ясно, что в случае, когда задача целочисленного программирования (ЗЦП) в классе M полиномиально разрешима, то в этом классе полиномиально разрешима и задача распознавания целочисленности (например, в множестве многогранников бистохастических матриц [2]). Ниже рассматривается класс многогранников, порождаемый задачей о 3-выполнимости, в котором ЗЦП NP-трудна. Устанавливается, что в этом классе задача распознавания целочисленности NP-полна. В статье [3] исследуется и класс многогранников, в котором ЗЦП NP-трудна, в то время как задача распознавания целочисленности полиномиально разрешима.

В пространстве R^s при $s = 6mn$ обозначим координаты точек $x_{ij}^{11}, x_{ij}^{12}, x_{ij}^{13}, x_{ij}^{21}, x_{ij}^{22}, x_{ij}^{23}$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\} = N_m, j \in \{1, 2, \dots, n\} = N_n$). Определим многогранник M_{mn} системой ограничений:

$$\begin{aligned}x_{ij}^{11} + x_{ij}^{12} + x_{ij}^{13} + x_{ij}^{21} + x_{ij}^{22} + x_{ij}^{23} &= 1, \\x_{ij}^{11} + x_{ij}^{12} + x_{ij}^{13} &= x_{kj}^{11} + x_{kj}^{12} + x_{kj}^{13}, \\x_{ij}^{11} + x_{ij}^{21} &= x_{il}^{11} + x_{il}^{21}, \\x_{ij}^{12} + x_{ij}^{22} &= x_{il}^{12} + x_{il}^{22}, \\x_{ij}^{11} \geq 0, \quad x_{ij}^{12} \geq 0, \quad x_{ij}^{13} \geq 0, \quad x_{ij}^{21} \geq 0, \quad x_{ij}^{22} \geq 0, \quad x_{ij}^{23} \geq 0,\end{aligned}$$

где $i, k \in N_m$, а $j, l \in N_n$. Обозначим $M^* = \{M_{mn} : m, n \in N\}$.

Теорема. Для класса многогранников M^* задача распознавания целочисленности является NP-полной.

Литература.

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. 416 стр.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. 344 стр.
3. Бондаренко В. А., Урываев Б. В. Об одной задаче целочисленной оптимизации// Автоматика и телемеханика. 6, 2007. Стр. 12-18.