ПРОБЛЕМА ЭФФЕКТИВНОСТИ РЯДА ТЕЙЛОРА.

Алексеева Е.Е., Лушников Е.М[1].

Балтийская Государственная Академия Рыбопромыслового флота
236029 Калининград, ул. Молодёжная 6, Кафедра Высшей Математики.
[1]Maritime University, Poland 70-500 Szczecin, str. Waly Chrobrego ½
INM. Tel. (091)-48-09-402 e-mail: gena@am.szczecin.pl

В своё время Коши обратил внимание на функции, которые не воспроизводятся рядами Тейлора. В качестве примера [1,2] он приводил функцию $f(x) = e^{-1/x^2}$, у которой классический ряд Тейлора имеет сплошь нулевые коэффициенты, а этот *сходящийся ряд*, состоящий из нулей, не воспроизводит функцию ни в одной точке, кроме точки $x = 0$. Такое суждение не приемлемо в своей сути и требует анализа.

Проведённые исследования позволили получить адекватное разложение этой функции в ряд Тейлора во всей области её существования. Функция $f(x) = e^{-1/x^2}$ преобразовывается [3] с помощью подстановки $y = 1/x$ к виду $f(x) = F(y) = e^{-y^2}$. В результате этого функция утрачивает свою эксклюзивность. Её разложение в ряд Тейлора (Маклорена) даёт:

$$e^{-1/x^2} = e^{-y^2} = 1 - \frac{y^2}{1!} + \frac{y^4}{2!} - \frac{y^6}{3!} + \ldots = 1 - \frac{1}{1!x^2} + \frac{1}{2!x^4} - \frac{1}{3!x^6} + \ldots \quad x \neq 0 \qquad (1)$$

Ряд Тейлора (1) адекватно воспроизводит функцию $f(x) = e^{-1/x^2}$ на всей числовой оси кроме точки $x = 0$, в которой и функция, и ряд не существуют по причине деления на ноль (запретная операция). Разложение (1) описывает частный случай, однако, без особого труда получаются *обобщённые* формулы подобных разложений, в виде:

$$e^{-1/x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!x^{nk}} \quad x \neq 0; \quad e^{1/x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!x^{nk}} \quad x \neq 0 . \qquad (2)$$

Всё сказанное позволяет сделать вывод о том, что ряд Тейлора универсален, не имеет каких-либо негативных свойств по отношению к отдельным видам функций, о которых пишется в литературе до настоящего времени.

Литература.

1. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А., Математический анализ в задачах и упражнениях. Москва: «Факториал», 1996. 477с.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2 М.: Физматлит, 2001. 864с.
3. Алексеева Е.Е., Лушников Е.М., Проблемы и решения в теории рядов, Калининград: «Янтарный сказ», 2004. 256с.