О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМ РОРБАХА И ФРЕШЕ

Дикусар В.В., Зеленков Г.А. [1], Зубов Н.В.
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва
[1]Морская государственная академия им. Ф.Ф.Ушакова,
Россия, 353918, Новороссийск, пр-т Ленина, 93,
тел. (8-3217)-61-0076, E-mail: mathshell@mail.ru

Следующее утверждение, можно получить из теоремы Гершгорина.

Теорема 1. Пусть для k и остальных $n-k$ диагональных элементов матрицы A соответственно выполняются неравенства: $a_{ii} > \sum_{i \neq j} \left| a_{ij} \right|$, $-a_{ii} > \sum_{i \neq j} \left| a_{ij} \right|$.

Тогда матрица A принадлежит классу (n,k) - эквивалентности.(k собственных чисел локализованы в правой полуплоскости, а $n-k$ – в левой). Будем называть матрицы, удовлетворяющие этим неравенствам, k-диагональными по строке или матрицы с k-диагональным преобладанием по строке.

Теорема обобщается на комплексные матрицы, если вместо диагональных элементов матрицы A_n взять их реальные части.

Такие матрицы для $k=0$ называют сверхустойчивыми.

Следующее утверждение, является обобщением теоремы Рорбаха**.**

Теорема 2. Пусть $A \in C^{n \times n}$, $A = \left(a_{ij} \right)$, существуют положительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$, что для элементов a_{ii} выполняются неравенства:

$$t_i \operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} t_j \left| a_{ij} \right|, \ \operatorname{Re} a_{ii} > 0; \ -t_i \operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} t_j \left| a_{ij} \right|, \operatorname{Re} a_{ii} < 0.$$

Тогда собственные числа матрицы A могут находиться только внутри кругов с центрами в точках a_{ii} и радиусами $R_i = \left| \operatorname{Re} a_{ii} \right|$.

Следующее утверждение является обобщением теоремы Фреше и следствием последнего утверждения.

Теорема 3. Пусть $A \in R^{n \times n}$ и существуют такие положительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_n$, что для всех диагональных элементов выполняются неравенства

$t_i \left| a_{ii} \right| > \sum_{i \neq j} t_j \left| a_{ij} \right|$. Кроме того, обозначим: $\delta_1 = \max a_{ii}$, $a_{ii} > 0; \delta_2 = \max\left(-a_{ii} \right)$, $a_{ii} < 0.$

Тогда собственные числа матрицы A могут находиться только в двух кругах:

либо в круге $\left| z - \delta_1 \right| < \delta_1$, либо в круге $\left| z + \delta_2 \right| < \delta_2$.

Теоремы 1-3 можно использовать, например, для исследования устойчивости и неустойчивости матриц систем управления.