

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЯХ ОБРАЗОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Харин А.А.

Современная гуманитарная академия, Россия, 109029, Москва, ул. Нижегородская,
д. 32, +7-915-400-9879, aaharin@yandex.ru

Пусть случайная величина (СВ) с плотностью вероятности f , задана на исходном интервале (ИИ) $(-\infty, +\infty)$. Отообразим исходное распределение СВ (РСВ) на полубесконечную часть $[a, +\infty)$ исходного интервала следующим образом.

Часть исходного РСВ, заданная в пределах интервала образа (ИО) $[a, +\infty)$, остается без изменения в образе РСВ. Часть исходного РСВ, заданная на $(-\infty, a)$, т.е. за пределами ИО, «отражается» внутрь ИО от его границы $x = a$.

Для практических приложений (см., напр., [1]) представляет интерес вопрос об условиях, при которых математическое ожидание (МО) образа распределения СВ находится на минимальном расстоянии от границы интервала образа.

Пусть m – медиана исходного РСВ, а μ_{Left} и μ_{Right} – МО его частей слева и справа от m , а m_{Im} , μ_{ImLeft} и $\mu_{ImRight}$ относятся к образу РСВ и пусть $a = 0$.

МО $\mu_{Im} \equiv \mu_{Image}$ образа РСВ, при $m \geq 0$ можно записать как

$$\mu_{Im} = \int_0^{+\infty} xf(x)dx + \int_0^{+\infty} xf(-x)dx = \mu_{ImRight} + \mu_{ImLeft} + \int_0^m xf(x)dx - \int_{-m}^0 xf(-x)dx.$$

Пусть образ распределения СВ смещается на расстояние $0 \leq |\Delta x| \leq m$ так, что m_{Im} смещается влево, т.е. $0 \leq m_{ImShifted} \leq m_{Im}$. Тогда получаем

$$\mu_{ImShifted} - \mu_{Im} = -2 \int_0^{\Delta x} xf(x)dx \leq 0. \quad (1)$$

Если $m \leq 0$ и образ распределения СВ смещается на расстояние $0 \leq \Delta x \leq |m|$ так, что m_{Im} смещается вправо, т.е. $0 \leq m_{Im} \leq m_{ImShifted}$, тогда, аналогично (1),

$$\mu_{ImShifted} - \mu_{Im} = 2 \int_0^{\Delta x} xf(x)dx \geq 0.$$

Следовательно, для образа РСВ, минимальное расстояние от математического ожидания μ_{Image} до границы интервала образа достигается в том случае, когда граница интервала образа проходит через медиану исходного распределения СВ.

Литература

1. Харин, А.А. О некоторых общих ограничениях в экономике и технике в условиях риска и дисперсии данных // Моделирование и Анализ Безопасности и Риска в Сложных Системах: 13-я Международная Научная Школа, 2015. Стр. 105-117.