НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ФАА ДИ БРУНО ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Сорокин П.Н.

Федеральное государственное учреждение Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), s_p_n_1974@bk.ru

Дифференцирование сложной функции приводит к формуле, опубликованной Франческо Фаа Ди Бруно в 1857 году:

Теорема (Формула Фаа Ди Бруно). Пусть функции $f(x)$ и $u(x)$ имеют n-ые производные. Тогда для n-ой производной функции $g(x) = f(u(x))$ имеет место следующая формула [1]:

$$g^{(n)}(x) \quad = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\ldots=n} f^{(k_1+k_2+k_3+\ldots)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+\ldots}, \tag{1}$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\ldots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\cdots} \cdot \left(\frac{u'}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{u''}{2!}\right)^{k_2} \cdot \left(\frac{u'''}{3!}\right)^{k_3} \cdots,$$

где суммирование в правой части (1) ведется по всем целым неотрицательным числам $k_1, k_2, k_3, \ldots,$ удовлетворяющим равенству $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots = n$.

Здесь мы обобщим эту формулу на случай функции $f(u,v)$ от функций $u(x)$, $v(x)$:

$$g^{(n)}(x) \quad = \left(\sum_{k_1+2k_2+3k_3+\ldots+nk_n=n} \frac{n! \cdot A_1^{k_1} \cdot A_2^{k_2} \cdot A_3^{k_3} \cdots A_n^{k_n}}{k_1!k_2!k_3!\cdots k_n!} \right) f(u,v),$$

где

$$A_j = \frac{u_j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{v_j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

$$u_j = \frac{d^j u(x)}{dx^j}, v_j = \frac{d^j v(x)}{dx^j}, \quad j = 1,2,3,\ldots,n.$$

Число различных мономов от n переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$ определяется диофантовым уравнением

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n, \quad k_j \geq 0.$$

Работа выполнена по теме государственного задания НИР 0065-2018-0004.

Литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков *В.Н.* Лекции по математическому анализу. 3-ое издание, переработанное и дополненное – М.: Дрофа, 2003 – 640 с.