ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ФАА ДИ БРУНО НА ВЕКТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

Сорокин П.Н.

ФГУ ФНЦ НИИ Системных Исследований РАН, Россия, 117218, Москва, Нахимовский проспект, д. 36, корп. 1, e-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула [1]:

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+...=n} F^{(k_1+k_2+k_3+...)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+...},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+...} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots} \left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{u^{(3)}(x)}{3!}\right)^{k_3} \ldots,$$

где сумирование берется по всем целым числам $k_1, k_2, ... \geq 0$, которые удовлетворяют уравнению $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ — производные m-го порядка.

Рассмотрим обобщение формулы Фаа Ди Бруно на векторный случай [2]:

Пусть $G(x) = F(\overline{u}(x))$, $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$ — сложная функция и существуют все её частные производные до n-го порядка, а функции $u_1(x)$, ..., $u_s(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-го дифференциала сложной функции $G(x)$ имеет место формула:

$$d^n G(x) = \sum_{n} \sum_{k_1} ... \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{s} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1} \, ... \, \partial u_s^{p_s}} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} ... \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}},$$

где суммирование ведется по всем решениям следующих диофантовых уравнений:

$$\sum_{n} \; : \; k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n,$$

$$\sum_{k_1} \; : \; a_{11} + a_{12} + ... + a_{1s} = k_1, \quad ... \quad \sum_{k_n} \; : \; a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{ns} = k_n,$$

$d = \partial/\partial x$ — дифференциальный оператор, k — порядок промежуточной производной, p_j — порядок частной производной по u_j. Параметры k, k_j, p_j, a_{ij} связаны так:

$$p_j = a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj}, \quad k = p_1 + p_2 + ... + p_s = k_1 + k_2 + ... + k_n, \quad j = \overline{1, s}.$$

Работа выполнена по теме государственного задания НИР 0065-2019-0007.

Литература.

1. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003. 640 с.
2. *Mishkov R.* Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with vector argument // Internat. J.Math. 2000. 24(7). P. 481–491.