СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОЛНЫМИ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

Симонова И.Э., Симонов Б.В.

ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет»
Россия, 400005, Волгоград, проспект им. В.И. Ленина, д. 28
Тел.: +7(988)493-50-47, факс: 24-80-71,
E-mail: simonova-vstu@mail.ru

Модули гладкости широко используются во многих областях функционального анализа. В работе исследованы модули гладкости функций двух переменных в смешанной метрике.

Обозначим через $L_{p_1,p_2}, 1 \le p_i < \infty, i = 1{,}2$ −множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2), 2\pi$ − периодических по каждому переменному, для которых

$$\|f\|_{p_1,p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^{p_1}\, dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty.$$

Будем писать, что $f \in L^0_{p_1,p_2}$, если $f \in L_{p_1,p_2}$ и $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2. Обозначим через $\omega_\alpha(f,\delta)_{p_1,p_2}$ − полный модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_{p_1,p_2}$, то есть

$$\omega_\alpha(f,\delta)_{p_1,p_2} = sup_{|h_1| \le \delta, |h_2 \le \delta|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} f(x_1 + (\alpha - n)h_1, x_2 + (\alpha - n)h_2) \right\|_{p_1,p_2},$$

где $\binom{\alpha}{n} = 1$ для $n = 0$, $\binom{\alpha}{n} = \alpha$ для $n = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ для $n \ge 2$.

Теорема. Пусть $f \in L^0_{1,1}, 2 \le\ q_i < \infty,\ \theta_i = 1 - \frac{1}{q_i}, (i = 1{,}2), \alpha > 0, \alpha + \theta_1 + \theta_2 \epsilon\, \boldsymbol{N}$, $q = min(q_1, q_2), \delta\ \epsilon\ (0{,}1)$. Тогда найдется $C > 0$, не зависящая от f и δ, такая, что

$$\omega_\alpha(f,\delta)_{q_1,q_2} \le C \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\theta_1 - \theta_2} \omega_{\alpha+\theta_1+\theta_2}(f,t)_{1,1} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Замечание 1. При $q_1 = q_2$ аналогичная теорема доказана в [1], стр. 73.
Замечание 2. Особый интерес представляет то, что эта оценка, верная в предельном случае $L_{1,1}$, не переносится на функции одной переменной из L_1.

Литература.

1. *Kolomoitsev Yu., Tikhonov S.* Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities, Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.