

ПЕРВООБРАЗНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ: ПОДХОДЫ БЕЗ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ (АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ)

Довбыш С.А.

СУНЦ имени А.Н.Колмогорова МГУ имени М.В.Ломоносова, МГТУ им. Н.Е.Баумана,
e-mail: sdovbysh@yandex.ru

Начала интегрального исчисления являются базовым разделом математического анализа, который изучается обычно сразу после дифференциального исчисления. Однако общепринятое изложение теории определённого интеграла, основанное на введении интегральных сумм, оказывается сложным для изучения и возникает вопрос о возможности более простого подхода к построению теории. Была обнаружена литература, предлагающая альтернативные подходы, основанные на непосредственном построении первообразных. Однако, эти подходы отражены только в нескольких учебниках и англоязычных статьях и остаются практически неизвестными.

Исторически развивались две равносильные трактовки определённого интеграла:

1) геометрическая (интеграл Римана или интеграл Дарбу или Дарбу-Римана): интеграл, трактуемый как площадь криволинейной трапеции под графиком, строго определяется через интегральные суммы.

2) кинематическая (интеграл Ньютона): интеграл от функции $f(x)$ – изменение координаты $F(x)$ точки в зависимости от момента времени x при движении по прямой с мгновенной скоростью $f(x)$, т.е. функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Н.Н.Лузин отмечал, что первый, общепринятый способ введения интеграла «очень труден и, надо сознаться, не только непригоден для начинающих, но и исторически как раз обратен тому пути, который первоначально был пройден наукой. ... это доказательство – длинное, трудное и недоступное для начинающих».

Только в 1904-1905 г.г. А.Лебег дал самодостаточное построение интеграла в рамках второй трактовки, т.е. предложил доказательство существования первообразной непрерывной функции, не опирающееся на использование определённого интеграла. Идея заключалась в равномерной аппроксимации исходной функции непрерывными кусочно-линейными функциями, для которых первообразные будут кусочно-квадратичными функциями, что позволяет записать искомую первообразную как подходящий предел кусочно-квадратичных функций. Аналогичный подход был развит Н.Бурбаки, который использовал аппроксимацию кусочно-постоянными («ступенчатыми») функциями. Наконец, в методе верхних функций Б.С.Томсона (2010) для аппроксимации также используются ступенчатые функции, но само понятие аппроксимации совершенно отличается от равномерной аппроксимации.

Подчеркнём, что в силу ряда причин можно сделать вывод о предпочтительности построения в учебном курсе теории определённого интеграла на основе кинематического, а не традиционного геометрического метода, если обсуждаются только непрерывные или кусочно-непрерывные подынтегральные функции.