ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ ШКОЛЬНИКОВ

Аммосова Н. В., Коваленко Б. Б.

В данной статье показаны примеры использования элементов теории графов при обучении школьников математике. В силу доступности, наглядности и полезности этого материала, возможно его рассмотрение на факультативных и внеурочных занятиях в школах разного уровня и профиля, в разных классах — как при работе с младшими школьниками, так и со старшеклассниками.

Как известно, рассмотрение большинства практических задач сводится к изучению совокупности объектов, существенные свойства которой описываются связями между этими объектами. Например, на карте авиалиний интерес представляет лишь то, между какими городами имеется связь. Органические молекулы образуют структуры, характерными свойствами которых являются связи между атомами. Интерес могут представлять различные экономические связи, связи и отношения между людьми, событиями, состояниями, и вообще, между любыми объектами.

В настоящее время теория графов широко применяется в различных областях науки и техники. К числу прикладных задач, решаемых при помощи графов, относятся, например, проектирование каналов связи и исследование процессов передачи информации, построение контактных схем и исследование конечных автоматов, сетевое планирование и управление, исследование математических операций, выбор оптимальных потоков в сетях, анализ и синтез цепей и систем, моделирование нервной системы живых организмов, исследование случайных процессов и многие другие задачи. Теория графов связана со многими разделами математики: геометрией и топологией, теорией множеств и математической логикой, теорией вероятностей и математической статистикой, теорией матриц и другими. Используя аппарат этих разделов, теория графов обогащает их методы и продолжает интенсивно развиваться.

Сейчас теория графов стала очень популярной среди учителей, школьников и студентов. Это связано с тем, что при помощи этой теории можно довольно просто решать большой круг самых разнообразных математических задач. На языке теории графов условия задач приобретают наглядность, что упрощает их анализ. Сами решения, как правило, являются простыми, и, в отличие от решений другими методами, не содержат утомительных вычислений. Это является очевидным достоинством, так как изобилие выкладок не свидетельствует о содержательности теории. Теория графов притягательна как раз тем, что при всей своей наглядности и простоте помогает решать серьезные математические и прикладные проблемы. Однако, как это ни странно, теория графов не входит в учебные планы математических специальностей университетов и в программы математических школ. В лучшем случае она изучается студентами и школьниками лишь на факультативах и спецкурсах. Исключение составляют технические и экономические вузы, где студенты вынуждены бегло познакомиться с графами при рассмотрении некоторых приложений.

Учащихся целесообразно ознакомить с историей возникновения и становления этого раздела математики.

Первая работа по графам была выполнена Леонардом Эйлером в 1736 г. и посвящалась решению знаменитой задачи о кенигсбергских мостах. Идеи, предложенные Эйлером в этой работе, легли в основу теории уникурсальных графов. Наряду с решением этой задачи, Эйлер получил также ряд результатов, которые легли в основу планарности графов. В своих работах Эйлер не использовал термин «граф». Впервые этот термин в 1936 г. ввел Д. Кёниг, назвав графами схемы, состоящие из множества точек и связывающих эти точки отрезков прямых и кривых линий. Теория графов связана с именами многих известных математиков. Так, А. Кэли применил теорию графов к проблеме раскраски карты, а У. Гамильтон исследовал один интересный класс графов, названных впоследствии гамильтоновыми графами. До конца XIX века графы применялись лишь при решении некоторых занимательных задач. Однако в начале XX века теория графов оформилась в виде самостоятельной математической дисциплины. Наряду с многочисленными головоломками и играми на графах появились важные практические приложения графов, многие из которых требовали тонких математических методов. Так, Кирхгоф применил графы для анализа электрических цепей, а Кэли исследовал важный класс графов для изучения насыщенных углеводородов.

Приведенные выше исторические сведения можно частично использовать и для детей более младшего возраста.

Знакомство с отдельными разделами теории графов становится возможным уже в начальной школе при решении всевозможных логических задач и головоломок. Дальнейшее знакомство с графами в основной школе поможет учащимся при изучении многих математических разделов, и будет служить хорошим подспорьем при решении сложных олимпиадных задач.

Приведенные ниже решения рассматриваемых задач основаны на следующих теоретических положениях, с которыми старшеклассники знакомятся при рассмотрении элементов теории графов.

Графом $G(V, E, f)$ называется совокупность непустого множества V, изолированного от него произвольного множества E и отображения $f : E \to V \& V$ множества E в $V\&V$, которое каждому элементу из E ставит в соответствие некоторый элемент из $V\&V$. При этом множества V и E называются соответственно *множеством вершин* и *множеством ребер графа* $G(V, E, f)$, а отображение f называется *отображением инциденции* этого графа.

Степенью вершины графа называется количество инцидентных ей ребер (для петли степень подсчитывается дважды). Степень вершины x будем обозначать через $\sigma(x)$.

Вершины графа называются *четными* или *нечетными* в зависимости от четности их степеней.

Цепью называется незамкнутый маршрут, состоящий из последовательности различных ребер. Частным случаем цепей являются такие маршруты, которые не проходят дважды через одну и ту же вершину. Такие маршруты называются *простыми цепями*.

Замкнутый маршрут, состоящий из последовательности различных ребер, называется *циклом. Простым циклом* называется маршрут, в котором начальная и конечная вершины совпадают, а все остальные вершины различны.

Граф называется *связным*, если для любой пары различных вершин этого графа существует цепь, соединяющая эти вершины.

Теорема. Для связного графа, имеющего нечетные вершины, необходимое количество росчерков равно половине количества нечетных вершин.

Граф называется *уникурсальным* (или *эйлеровой линией)*, если он рисуется одним росчерком.

Другими словами, граф называется *уникурсальным графом,* если все его ребра можно включить либо в простой цикл, либо в простую цепь. Если все ребра графа можно включить в простой цикл, то такой уникурсальный граф называется *эйлеровым циклом.* Уникурсальный граф, не являющийся эйлеровым циклом, называется *эйлеровой цепью.*

Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым циклом,* а простая цепь, обладающая этим свойством, — *гамильтоновой цепью.*

Рассмотрение теоретических положений и доказательства теорем осуществляются учащимися с опорой на наглядность и интуитивную составляющую мышления.

Для старшеклассников можно предложить следующий план факультативных (или внеурочных) занятий. К основным понятиям теории графов целесообразно подводить школьников, решая задачи.

1. Абстрактное определение графа.
2. Определение геометрического графа.
3. Инцидентность и смежность элементов графа.
4. Степени вершин графа.
5. Изоморфизм графов.
6. Геометрические реализации абстрактных графов.
7. Части графа.
8. Непрерывные последовательности ребер графа.
9. Связность графов.
10. Множества сочленения и разделяющие множества.
11. Уникурсальные графы.
12. Гамильтоновы графы.

Приведем примеры задач для учащихся старших классов.

Задача 1.Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?

Решение. Куб имеет 12 ребер, сумма длин которых равна 120 см. Если бы было возможно из проволоки длиной 120 см, не ломая ее, изготовить каркас этого куба, то это означало бы, что граф, состоящий из вершин и ребер куба, является уникурсальным. Но так как этот граф имеет 8 вершин третьей степени, то по теореме, приведенной выше, для его изображения необходимо 4 росчерка. Итак, ответ к задаче — отрицательный. Заметим, что для изготовления модели куба с ребром 10 см необходимо либо проволоку 120 см разрезать 3 раза, либо использовать кусок проволоки длиной 150 см и по каким-то трем ребрам проложить ее дважды.

Задача 2. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор ровно один раз (см. рис. 1)?

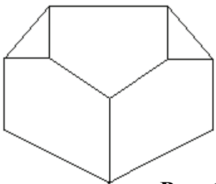

Рис. 1.

Решение. Каждому участку парка, ограниченному заборами (включая и внешнюю часть), поставим в соответствие точку. Каждому забору, разделяющему два участка парка, поставим в соответствие линию, соединяющую соответствующие точки (см. рис. 2). Выделенные множества точек и линий образуют геометрический граф, представленный на рис. 3. Ясно, что решение задачи свелось к вопросу об уникурсальности этого графа. Но граф на рис. 2 имеет 6 нечетных вершин, поэтому ответ к задаче — отрицательный. Отметим, что если в этом графе добавить два ребра между любыми двумя различными парами вершин, то граф превратиться в эйлерову цепь.

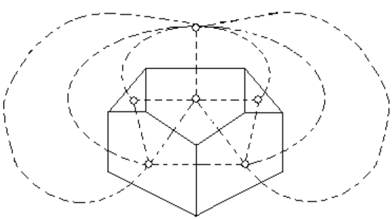

Рис. 2.

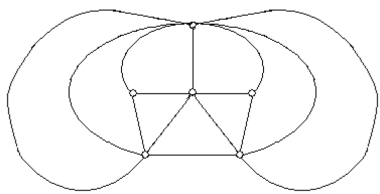

Рис. 3.

Задача 3. Что можно сказать о графе, имеющем гамильтонов цикл, который одновременно является эйлеровым циклом? В каких графах существует гамильтонова цепь, являющаяся одновременно эйлеровой цепью?

Решение. Если граф содержит гамильтонов цикл, то этот граф сам является простым циклом. Если же граф содержит гамильтонову цепь, являющуюся одновременно эйлеровой цепью, то этот граф сам является простой цепью. Это следует из того, что путь, являющийся одновременно и гамильтоновым и эйлеровым, проходит все вершины и ребра.

Задача 4. Можно ли спроектировать такой город с односторонним движением на его улицах, чтобы в каждый перекресток входило по 2 дороги, а выходило по 4 дороги?

Решение. Нет. Сумма положительных полустепеней всех вершин равна сумме отрицательных полустепеней.

Задача 5. В некоторой стране есть столица и еще сто городов. Некоторые пары городов соединены дорогами с односторонним движением, причем, два города в одном направлении может соединять не более чем одна дорога. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя приехать ни из одного города.

Доказательство. Необходимо доказать, что положительная полустепень вершины-столицы равна нулю. Для этого достаточно подсчитать сумму отрицательных и сумму положительных полустепеней всех вершин. Пусть С — вершина-столица. Если $\sigma^{+}(C)=n$, то $\sigma^{-}(C)\le 100-n$. Сумма положительных полустепеней всех вершин равна $21\cdot 100+n$, а сумма всех отрицательных полустепеней не больше, чем $20\cdot 100+(100-n)$. Следовательно, $21\cdot 100+n\le 20\cdot 100+\left(100-n\right)$, т. е. $2n\le 0$, и $n=0$.

В начальной и 5–6-х классах основной школы целесообразно проводить пропедевтическую работу по подготовке учащихся к знакомству с элементами теории графов. Кроме того, первоначальные понятия теории графов помогают школьникам в поиске решения задач, как программных, так и повышенной трудности. Как известно, отсутствие необходимой наглядности при решении задач является основным тормозом к осознанным мыслительным действиям, а соблюдение детьми определенной точности и аккуратности при построении графов, граф-схем имеет важное воспитательное значение. Аккуратно выполненные графические изображения в значительной степени способствуют эстетическому воспитанию детей, заставляют любоваться неожиданным решением задачи, стимулируют поиски рациональных путей решения, снижают утомляемость, повышают внимание. И наоборот, грубый чертеж мешает видеть скрытые в условии задачи закономерности, на которых основано решение.

В процессе многолетней практики нами выяснено, что для учащихся 2–6-х классов могут быть предложены занятия с использованием элементов теории графов следующего содержания.

1. Состав числа (представление числа в виде различных сумм двух слагаемых), решение задач с помощью графов.
2. Нахождение числа по данному графу.
3. Использование графов при нахождении последовательности чисел.
4. Задачи на пути и уникурсальные фигуры, начертание фигур одним росчерком.
5. Лабиринты.
6. Комбинаторные задачи.
7. Применение граф-деревьев для решения комбинаторных задач.
8. Решение разнообразных задач с использованием различных видов граф-схем.
9. Самостоятельная работа.

Как видим, многие задачи школьного курса математики могут быть решены, кроме общепринятого способа, еще и с помощью понятий теории графов (состав числа, нахождение закономерностей в числовых последовательностях и др.). Не следует искусственно вводить новые термины (пути, вершины, уникурсальность и т. д.), можно формулировать и решать задачи без их использования. Однако учащиеся без употребления специальной терминологии обязательно проникнутся содержанием новых понятий и, работая с ними, содержательно их усвоят. Если учитель найдет целесообразным, то некоторые первоначальные термины и определения может ввести в 6 (или 5) классе после их усвоения учащимися на понятийном уровне.

Приведем несколько задач по некоторым темам, перечисленным выше.

Задача 6. Начертите каждую из этих фигур (см. рис. 4) одной непрерывной линией, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя линии дважды. Занумеруйте линии в той последовательности, в которой вы их обводили.

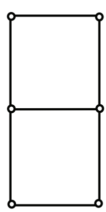
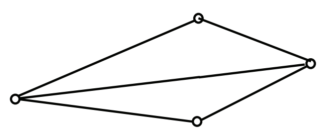

Рис. 4.

Задача 7. На рис. 5 приведена карта зоопарка. Вершины — вход, выход, перекрестки и повороты; линии — это дорожки, вдоль которых расположены клетки. Найдите маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им всех зверей и не показав им более одного раза ни один участок пути.

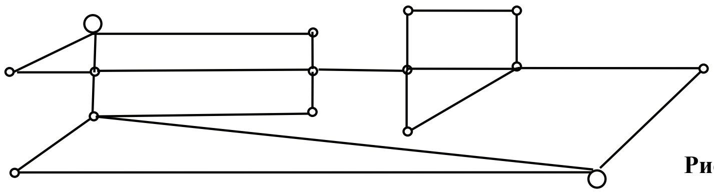

Рис. 5.

Задача 8. На озере находятся 7 островов (см. рис. 6), которые соединены между собой мостами так, как показано на рисунке. На какой остров должен катер доставить путешественников, чтобы они могли по каждому мосту один и только один раз? С какого острова катер должен снять этих людей? Почему нельзя доставить путешественников на остров А?

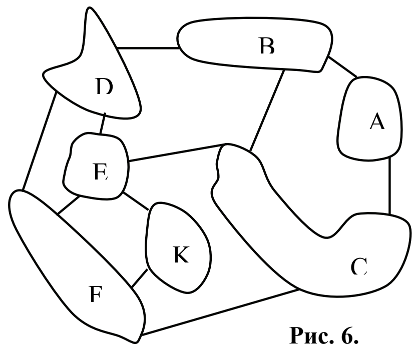

Рис. 6.

Это задачи по теме 4, причем даны в порядке усложнения содержательной стороны. В первой задаче учащийся непосредственно может начать обвод изображенных фигур согласно требованиям задачи, во второй используются понятия вершин и путей на готовой математической модели, в третьей же школьнику сначала самому требуется построить модель, являющуюся графом.

В теме 5 полезно сделать с учащимися исторический экскурс, сообщив им рекомендованную литературу и организовав поиск нужных и интересных сведений. Учащиеся обучаются работе с каталогами книг, книгами и книжными текстами. В результате дети выступают перед одноклассниками с небольшими сообщениями. В зависимости от уровня развития класса учитель организует исследовательскую работу на соответствующем уровне. Найденный школьниками-исследователями материал может содержать приведенные ниже сведения.

Происхождение задачи о лабиринтах относится к глубокой древности и теряется во мраке легендарных сказаний. Древние (да, пожалуй, многие и теперь) задачу о лабиринтах считали вообще неразрешимой. Человек, попавший в лабиринт, не мог уже из него выйти, если только какое-либо чудо не приходило ему на помощь.

Слово «лабиринт» — греческое, в переводе означает «ходы в подземельях». Существует, действительно, очень много природных подземных пещер с таким огромным количеством по всем направлениям перекрывающихся коридоров, закоулков и тупиков, что нетрудно в них заблудиться, потеряться и, не найдя выхода, умереть от голода и жажды.

Примеры такого же рода, но уже искусственных, лабиринтов представляют шахты иных рудников, или так называемые катакомбы.

Вероятнее всего, подобные подземелья возбудили у строителей еще древнейших времен желание подражать им искусственными сооружениями. И у древних писателей мы встречаем указание на существование искусственных лабиринтов, например, у египтян. Словом «лабиринт» чаще всего обозначали именно искусственное чрезвычайно сложное сооружение, составленное из очень большого числа аллей или галерей, бесчисленные разветвления, перекрестки и тупики которых заставляли попавшего туда бесконечно блуждать в тщетных поисках выхода. Об устройствах таких лабиринтов слагались целые легенды.

Известнее всего рассказ о лабиринте, построенном мифическим Дедалом на острове Крит для мифического же царя Миноса. В центре лабиринта жило чудовище Минотавр, и никто из попавших туда не мог выйти обратно, делаясь в конце концов жертвой чудовища. Семь юношей и семь девушек приносили афиняне в дар ежегодно чудовищу, которое преисправно их пожирало. Наконец, Тезей не только убил Минотавра, но и вышел из лабиринта, не заблудившись в нем, при помощи нити из клубка царевны Ариадны.

Лабиринты бывают самой разнообразной формы и устройства. До наших дней сохранились еще и запутанно-сложные галереи, и ходы пещер, и архитектурные лабиринты над могилами, и извилистые планы на стенах или полах, обозначенные цветным мрамором или черепицей, и извивающиеся тропинки на почве, и рельефные извилины в скалах.

Далее учащимся демонстрируются изображения лабиринтов: лабиринта, выложенного из камня на полу храма святого Квентина во Франции (имеет форму правильного восьмиугольника), «дернового» лабиринта квадратной формы со стороной 33–34 метра, просуществовавшего до 1797 года в графстве Эссекс в Англии и др.

Рисунками лабиринтов украшались одеяния христианских императоров до девятого столетия, и остатки таких же украшений сохранились до сих пор на стенах церквей и соборов того времени. В Англии много лабиринтов, сделанных из дерна на лужайках. Распутать такие лабиринты нетрудно. С течением времени эти фигуры потеряли свое символическое значение и сделались мало-помалу предметом развлечения. Лабиринты переходят в сады, цветники и парки, где путем проведения прихотливо извивающихся, то пересекающихся, то внезапно прегражденных или заканчивающихся тупиком дорожек получались самые запутанные и головоломные фигуры, в которых действительно нелегко было найти дорогу от края к центру и где трудно было бы не заблудиться.

Люди изощрялись в изобретении самых замысловатых и «безвыходных» лабиринтов. Но, на самом деле, возможно ли построить или даже начертить безвыходный лабиринт, т. е. такой, в котором найти путь к его центру и найти отсюда обратный выход было бы только делом удачи, случая, счастья, а не совершенно определенного и правильного математического расчета?

Разрешение этого вопроса принадлежит более позднему времени, и начало ему положено знаменитым математиком Леонардом Эйлером. Результаты проведенных в этом направлении изысканий привели к заключению, что нет безвыходных лабиринтов. Учащихся постарше можно познакомить с личностью и вкладом Эйлера в развитие теории графов.

Учащимся может быть предложена творческая работа — начертить свой лабиринт и сочинить загадочную историю его возникновения. Может быть объявлен конкурс детских работ. Подобная деятельность развивает у школьников не только графические навыки, мелкую моторику рук, но и позволяет развить их воображение и творческое мышление.

ELEMENTS OF GRAPH THEORY IN SCHOOL ELECTIVE COURSES

Ammosova N. V., Kovalenko B. B.

Examples of use of elements of graph theory in school mathematical training are given. This topics are visually comprehensible and thus can supplement various courses, both core and elective, in primary and secondary school.