К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОЙ МАТРИЦЕЙ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Львова Т. Л.

Предложен способ определения условий существования ненулевого квазипериодического решения для систем линейных дифференциальных уравнений с особенной матрицей при производных. Полученные результаты применяются при исследовании конкретной математической модели линейной электрической цепи.

Введение. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$A\dot{x} = Bx + f(t), \tag{1}$$

в которой x — n-мерный вектор, A и B — $n \times n$ постоянные матрицы, причем $\det A = 0$, $f(t)$ — n-мерная вектор-функция.

Системы такого вида часто встречаются в приложениях, особенно в теории автоматического регулирования и теории электрических цепей. Большое количество задач, которые приводят к необходимости решения системы (1), рассмотрены в работе (Бояринцев, 1980).

Вопросы построения общего решения систем дифференциальных уравнений типа (1) с произвольными матрицами рассматривались во многих работах. Прежде всего отметим книгу (Гантмахер, 1954), в которой на основании теории элементарных делителей получено общее решение системы (1). В работе (Бояринцев, 1980) для решения системы (1) используется обратная матрица Дразина. В работе (Лукьянова, 1998) находится решение в виде ряда Фурье, при условии, что $f(t)$ непрерывная, 2π – периодическая вектор-функция.

В настоящей статье предполагаем, что $f(t)$ — квазипериодическая вектор-функция со спектром W, вида

$$f(t) = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(c_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + d_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right),$$

где c_0, а также при любом $p_j \in D_j$, c_{p_j}, d_{p_j} — n-мерные векторы. Введем множество $D_j = \left\{ p_j : p_j = \left(k_1^j, \ldots, k_m^j\right), \sum_{i=1}^{m} k_i^j = j,\ j \in \mathbf{N},\ k_i^j \in \mathbf{Z}^* \right\}$, где $m \in \mathbf{N}$ некоторое фиксированное число, $\mathbf{Z}^*$ — множество целых неотрицательных чисел. Спектр $W = \left\{ 0, \sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \right\}$, $\omega_i \in \mathbf{R}^+$, $i = \overline{1, m}$ — несоизмеримые числа.

Символом $M(W)$ обозначим множество тригонометрических рядов, вида

$$x(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(a_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + b_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right), \qquad (2)$$

в котором a_0, а также при любом $p_j \in D_j$, a_{p_j}, b_{p_j} n-мерные векторы. Нулевым элементом множества $M(W)$ назовем ряд с нулевыми коэффициентами. Множество $M(W)$ замкнуто относительно операций сложения, умножения на число и на матрицу.

Под символом $\dot{x}(t)$ будем понимать элемент множества $M(W)$, определяемый равенством

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(b_{p_j} \left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \right) \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) - a_{p_j} \left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i \right) \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right).$$

Определение 1. Элемент $x(t) \in M(W)$ называется квазипериодическим решением системы (1), если $A\dot{x}(t) - Bx(t) - f(t)$ нулевой элемент множества $M(W)$.

Ставится задача найти условия, при которых система (1) имеет квазипериодическое решение со спектром W.

Теоретические исследования. Выполним замену переменных $x = Qy$, $\det Q \neq 0$ и умножим систему уравнений (1) слева на матрицу P, $\det P \neq 0$. Получим систему $\widetilde{A}\dot{y} = \widetilde{B}y + \widetilde{f}(t)$, в которой $\widetilde{A} = PAQ$, $\widetilde{B} = PBQ$, $\widetilde{f}(t) = Pf(t)$.

Будем предполагать, что для системы уравнений (1) выполнено указанное преобразование. Для удобства дальнейших исследований, сохраним прежние обозначения. Тогда матрица A определится равенством $A = [colon(A_{11}, 0), colon(0, 0)]$ (Гантмахер, 1954), где A_{11} — $s \times s$ матрица, $s < n$ и $\det A_{11} \neq 0$. Матрицу B представим в виде $B = [colon(B_{11}, B_{21}), colon(B_{12}, B_{22})]$, B_{11} — $s \times s$ матрица, а квазипериодическую вектор-функцию $f(t)$, как $f(t) = colon(f_1(t), f_2(t))$, где

$$f_1(t) = c_0^1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(c_{p_j}^1 \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + d_{p_j}^1 \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right),$$

c_0^1, а также при любом $p_j \in D_j$, $c_{p_j}^1$, $d_{p_j}^1$ — s-мерные векторы,

$$f_2(t) = c_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(c_{p_j}^2 \cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) + d_{p_j}^2 \sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right) \right),$$

c_0^2, а также при любом $p_j \in D_j$, $c_{p_j}^2$, $d_{p_j}^2$ — $(n-s)$-мерные векторы.

Система уравнений (1) будет эквивалентна системе

$$\begin{aligned} A_{11}\dot{x}_1 &= B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + f_1(t), \\ 0 &= B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + f_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где x_1 — s-мерный вектор, x_2 — $(n-s)$-мерный вектор, которые являются компонентами вектора $x = colon(x_1, x_2)$.

Квазипериодическое решение системы (3) находим в виде (2). Векторы a_0, a_{p_j}, b_{p_j} представим как $a_0 = colon(a_0^1, a_0^2)$, $a_{p_j} = colon(a_{p_j}^1, a_{p_j}^2)$, $b_{p_j} = colon(b_{p_j}^1, b_{p_j}^2)$, причем a_0^1, $a_{p_j}^1$, $b_{p_j}^1$ — s-мерные векторы, а a_0^2, $a_{p_j}^2$, $b_{p_j}^2$ — $(n-s)$-мерные векторы.

Подставим ряд (2) в систему (3) и приравняем коэффициенты при $\cos\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right)$ и $\sin\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i t \right)$. Получим, что ряд (2) тогда и только тогда, является решением системы (1), когда разрешимы следующие системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} B_{11}a_0^1 + B_{12}a_0^2 &= -c_0^1, \\ B_{21}a_0^1 + B_{22}a_0^2 &= -c_0^2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}a^1_{p_j} + B_{12}a^2_{p_j} - A_{11}b^1_{p_j}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i\right) = -c^1_{p_j}, \\
&A_{11}a^1_{p_j}\left(\sum_{i=1}^{m} k_i^j \omega_i\right) + B_{11}b^1_{p_j} + B_{12}b^2_{p_j} = -d^1_{p_j}, \\
&B_{21}a^1_{p_j} + B_{22}a^2_{p_j} = -c^2_{p_j}, \\
&B_{21}b^1_{p_j} + B_{22}b^2_{p_j} = -d^2_{p_j}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Рассмотрим систему (4). Ее можно представить в виде $B \cdot a_0 = -c_0$, это СЛАУ n- го порядка. Если она не совместна, то система (1) квазипериодического решения со спектром W не имеет.

Исследуем систему (5). Рассмотрим систему уравнений, составленную из последних двух уравнений

$$
\begin{aligned}
&B_{21}a^1_{p_j} + B_{22}a^2_{p_j} = -c^2_{p_j}, \\
&B_{21}b^1_{p_j} + B_{22}b^2_{p_j} = -d^2_{p_j}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Введем обозначения: $B_2 = (B_{21}, B_{22})$, $F_{p_j} = \left(-c^2_{p_j}, -d^2_{p_j}\right)$, $Y_{p_j} = \left[colon\left(a^1_{p_j}, a^2_{p_j}\right), colon\left(b^1_{p_j}, b^2_{p_j}\right)\right]$ для любых $p_j \in D_j$, тогда систему (6) можно записать как

$$
B_2 Y_{p_j} = F_{p_j}. \tag{7}
$$

В дальнейшем, потребуется следующее определение (Бояринцев, 1980).

Определение 2. Матрица G называется полуобратной к матрице K, если выполняется равенство $KGK = K$.

Любую из полуобратных матриц к матрице K будем обозначать через K^-, так что

$$
KK^-K = K. \tag{8}
$$

Теорема. Для того чтобы, матричное уравнение (7) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$
\left(E - B_2 B_2^-\right)F_{p_j} = 0. \tag{9}
$$

Доказательство. Необходимость. Пусть Y — решение матричного уравнения (7). Умножим равенство $B_2 Y = F_{p_j}$ слева на матрицу $E - B_2 B_2^-$:

$$\left(E - B_2 B_2^-\right) B_2 Y = \left(E - B_2 B_2^-\right) F_{p_j},$$

откуда получаем $E B_2 Y - B_2 B_2^- B_2 Y = \left(E - B_2 B_2^-\right) F_{p_j}$, учитывая свойство (8), получим равенство (9).

Достаточность. Пусть равенство (9) справедливо. Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться, что $Y_{p_j} = B_2^- F_{p_j}$ является решением уравнения (7). Теорема доказана.

Если равенство (9) выполнено, то общее решение системы (7) принимает вид

$$Y_{p_j} = B_2^- F_{p_j} + \left(E - B_2^- B_2\right) \cdot U, \tag{10}$$

где U произвольная матрица размерности $(n \times 2)$.

Найденное решение (10) подставим в первые два уравнения системы (5). Получим систему линейных алгебраических уравнений порядка $2s$ с $2n$ неизвестными.

Возможны следующие случаи:

1) полученная система неразрешима, тогда система дифференциальных уравнений (1) квазипериодического решения со спектром W не имеет;

2) полученная система разрешима, тогда число произвольных постоянных в квазипериодическом решении системы дифференциальных уравнений (1), определится рангом полученной системы линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, нахождение квазипериодического решения системы дифференциальных уравнений с особенной матрицей при производных (1), сводится к исследованию и определению решений систем алгебраических уравнений (4) и (5).

Пример. Найдем квазипериодический режим математической модели линейной электрической цепи, приведенной в работе (Бессонов, 2002). Система дифференциальных уравнений, определяющая энергетическое состояние цепи, выводится на основании двух законов Кирхгофа, и имеет вид

$$\begin{aligned} &u(t) = i_1 R_1 + u_L + i_2 R_2, \\ &u(t) = i_1 R_1 + u_L + u_C + i_3 R_3, \\ &i_1 = i_2 + i_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Заменой переменных $u_C = x_1$, $i_1 = x_2$, $i_2 = x_3$ систему (11) сведем к системе (1), где $x = colon(x_1, x_2, x_3)$, $f(t) = colon\left(0, \frac{1}{L}u(t), 0\right)$,
$B = \left[colon\left(\frac{-1}{R_3C}, 0, \frac{1}{R_3}\right), colon\left(0, \frac{-R_1}{L}, 1\right), colon\left(\frac{R_2}{R_3C}, \frac{-R_2}{L}, \frac{-R_2}{R_3} - 1\right)\right]$,
$A = [colon(1, 0, 0), colon(0, 1, 0), colon(0, 0, 0)]$.

Пусть параметры цепи будут $C = 0.1$ Ф, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $L = 1$ Гн. На вход подается напряжение вида

$$u(t) = c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(c_{p_j} \cos\left(k_1^j + k_2^j \sqrt{5}\right)t + d_{p_j} \sin\left(k_1^j + k_2^j \sqrt{5}\right)t\right) \text{ В.}$$

Таким образом, имеем $m = 2$, $\omega = \left(1, \sqrt{5}\right)$, спектр $W = \left\{0, \sum_{i=1}^{2} k_i^j \omega_i\right\}$,

$$D_j = \left\{p_j : p_j = \left(k_1^j, k_2^j\right), \sum_{i=1}^{2} k_i^j = j,\ j \in \mathbf{N},\ k_i^j \in \mathbf{Z}^*\right\}.$$

Тогда получим систему (3), в которой $A_{11} = [colon(1, 0), colon(0, 1)]$, $B_{11} = [colon(-1, 0), colon(0, -20)]$, $B_{12} = colon(30, -30)$, $f_1(t) = colon(0, u(t))$, $B_{21} = (0.1 \quad 1)$, $B_{22} = -4$, $f_2(t) = 0$. Решение этой системы находим в виде (2). Для этого необходимо найти решения систем алгебраических уравнений (4) и (5), которые в условиях рассматриваемого примера записываются так

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix} \cdot a_0^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot c_0, \\ (0{,}1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a_0^1 \\ a_0^2 \end{pmatrix} - 4 \cdot a_0^3 = 0, \end{gathered} \qquad (12)$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a^1_{p_j}\\ a^2_{p_j}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30\\ -30\end{pmatrix}\cdot a^3_{p_j}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b^1_{p_j}\\ b^2_{p_j}\end{pmatrix}\cdot z_j=\begin{pmatrix}0\\ -c_{p_j}\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a^1_{p_j}\\ a^2_{p_j}\end{pmatrix}\cdot z_j+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b^1_{p_j}\\ b^2_{p_j}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30\\ -30\end{pmatrix}\cdot b^3_{p_j}=\begin{pmatrix}0\\ -d_{p_j}\end{pmatrix},\\
&\begin{pmatrix}0{,}1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a^1_{p_j}\\ a^2_{p_j}\end{pmatrix}-4\cdot a^3_{p_j}=0,\\
&\begin{pmatrix}0{,}1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b^1_{p_j}\\ b^2_{p_j}\end{pmatrix}-4\cdot b^3_{p_j}=0,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где $z_j=\left(k_1^j+k_2^j\sqrt{5}\right)$.

Решением системы (12) будет вектор

$$a_0=colon\left(0.6c_0,\,0.02c_0,\,0.02c_0\right). \tag{14}$$

Система, составленная из двух последних уравнений системы (13) имеет вид системы (7), где $B_2=\begin{pmatrix}0.1 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $F_{p_j}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$, $Y_{p_j}=\left[colon\left(a^1_{p_j},\,a^2_{p_j},\,a^3_{p_j}\right),colon\left(b^1_{p_j},\,b^2_{p_j},\,b^3_{p_j}\right)\right]$ для любых $p_j\in D_j$. Одной из полуобратных матриц матрицы B_2 будет $B_2^-=colon\left(0,1,0\right)$. Равенство (9) примет вид $\left(1-1\right)\cdot F_{p_j}=0$. Тогда решением системы (7), согласно (10) будет $Y_{p_j}=\left[colon\left(u^j_{11},-0.1u^j_{11}+4u^j_{31},\,u^j_{31}\right),\quad colon\left(u^j_{12},\,-0.1u^j_{12}+4u^j_{32},\,u^j_{32}\right)\right]$, в котором $\left(u^j_{11},u^j_{31},u^j_{12},u^j_{32}\right)$ произвольные постоянные.

Найденное решение системы (7) подставим в первые четыре уравнения системы (13) получим

$$
\begin{aligned}
&-u^j_{11}+30u^j_{31}-z_ju^j_{12}=0,\\
&2u^j_{11}-110u^j_{31}+0.1z_ju^j_{12}-4z_ju^j_{32}=-c_{p_j},\\
&z_ju^j_{11}-u^j_{12}+30u^j_{32}=0,\\
&-0.1z_ju^j_{11}+4z_ju^j_{31}+2u^j_{12}-110u^j_{32}=-d_{p_j}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Непосредственно вычислениями можно убедиться, что для любых точек $p_j\in D_j$ система алгебраических уравнений (15) имеет единственное решение.

Итак, в электрической цепи с заданными параметрами, возникает квазипериодический режим изменения тока и напряжения, определенный равенством

$$x(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p_j \in D_j} \left(a_{p_j} \cos\left(\sum_{i=1}^{2} k_i^j \omega_i t \right) + b_{p_j} \sin\left(\sum_{i=1}^{2} k_i^j \omega_i t \right) \right),$$

в котором a_0 принимает значение (14), а векторы a_{p_j} и b_{p_j} для любых $p_j \in D_j$ находятся из решения системы (15).

Условия разрешимости системы (15) определяют условия существования квазипериодического режима математической модели электрической цепи, заданной системой (11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. — М.: Гардарики, 2002.

Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Госиздат. тех.-теор. литер., 1954.

Лукьянова Г. С. Нахождение решения линейной системы дифференциальных уравнений с собственной матрицей при производных с помощью рядов Фурье // *Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения*. — 1998. — № 1. — С. 57–64.

TO THE QUESTION OF EXISTENCE OF QUASIPERIODIC SOLUTION FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR MATRIX AT DERIVATIVES

Lvova T. L.

The method to determine conditions for existence of nonzero quasiperiodic solution for systems of linear differential equations with singular matrix at derivatives is offered. Obtained results are used for analysis of mathematical model of linear electric circuit.