О КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ШИРОКОГО КЛАССА ОБЛАСТЕЙ

Силаев Д. А., Коротаев Д. О.

Данная работа посвящена использованию сглаживающих S-сплайнов 5-й степени. Такие сплайны являются кусочно-полиномиальной функцией, причем первые три коэффициента каждого полинома, определяются условиями гладкой склейки до второй производной включительно, а остальные три – методом наименьших квадратов. С помощью таких сплайнов строятся квадратурные и кубатурные формулы 6-го порядка для вычисления одно-, двух- и трехмерных интегралов в односвязной области. Получены соответствующие оценки сходимости.

Введение. В пространстве R^3 рассматривается ограниченная область V с границей $\Gamma = \partial V$. Пусть граница задана параметрически $\Gamma : \{(\tilde{x}(u,v), \tilde{y}(u,v), \tilde{z}(u,v)), (u,v) \in \Omega \in R^2\}$, где $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ — заданные функции. В области V рассматривается гладкая функция $f \in C^6(\Omega)$, т.е. f имеет ограниченные шестые частные производные. В работе предлагается метод построения кубатурной формулы:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k) + O(h^6) \qquad (1)$$

шестого порядка аппроксимации, где c_k — веса, P_k — узлы квадратурной формулы для достаточно широкого класса областей V с границей Γ.

В основу построения положена аппроксимация в пространстве гладкой функции $f(x,y,z)$ полулокальным сглаживающим сплайном или S-сплайном класса C^2, состоящим из полиномов пятой степени. Проблема, с которой мы здесь сталкиваемся, состоит из двух моментов. Во-первых, как унифицировать вычисление большого числа таких интегралов по заданной области. Во-вторых, как с большой степенью точности учесть вид границы области V. Здесь мы эти проблемы решаем, сводя с помощью формулы Гаусса-Остроградского интеграл по области V к соответствующему интегралу по границе области $\Gamma = \partial V$. Подобный подход возможен и для построения формул интегрирования гладких функций в многомерных областях (см. Список литературы).

Одномерный S-сплайн класса $\mathbf{C^2}$. Рассмотрим на отрезке [*a,b*] равномерную сетку $x_k = a + kh,\;\; k = 0,...,K$, $h = (b-a)/K$ — шаг сетки. Разобьем отрезок [*a,b*] на группы, для этого введем ещё одну равномерную сетку $\xi_l = a + lH$, $H = mh,\;\; m \in Z$. Таким образом, переходя из одной группы в другую, мы осуществляем сдвиг системы координат и рассматриваем каждый l-й полином на отрезке [*0,H*]. Пусть значения приближаемой функции на этой сетке $\boldsymbol{y} = \left(y_0, y_1, \ldots, y_K\right) \in \boldsymbol{R}^{K+1}$. Обозначим:

$$P_S^n \left\{ u : u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=3}^{n} a_i x^i \right\}$$

множество полиномов степени 5 с фиксированными коэффициентами a_0, a_1, a_2 . Рассмотрим функционал:

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 .$$

В классе P_S^n ищется такой полином g_l , который минимизирует функционал

$$\Phi^l(u) = \sum_{k=0}^{M} (u(\xi_l + kh) - y_{ml+k})^2 \to \min(a_3, a_4, a_5)$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$a_0^l = g_{l-1}(\xi_l - \xi_{l-1}) = g_{l-1}(H),\; a_1^l = g'_{l-1}(H),\; a_2^l = \frac{1}{2} g''_{l-1}(H), \tag{2}$$

где $l =$ 0,1,…, *L*-1. При $l = 0$, $g_{l-1}(H) = g_{L-1}(H)$ — есть условие периодичности S-сплайна. Так как $a_0^l = g_l(0),\, a_1^l = g'_l(0),\, a_2^l = g''_l(0)/2$, то условия (2) есть условия гладкой склейки двух последовательных полиномов. В непериодическом случае коэффициенты a_0^0, a_1^0, a_2^0 задаются начальными условиями y_0, y'_0 , $y''_0/2$ [1]. Здесь L — число групп, на которые разбита

---

[1] В случае если функция задана таблицей, то y'_0, y''_0 можно вычислить с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка аппроксимации, например,
$y'_0 = -\frac{1}{60}(147y_0 - 360y_1 + 450y_2 - 400y_3 + 225y_4 - 72y_5 + 10y_6)/h + O(h^5)$,
$y''_0 = \frac{1}{180}(812y_0 - 3132y_1 + 5265y_2 - 5080y_3 + 2970y_4 - 972y_5 + 137y_6)/h^2 + O(h^4)$

исходная таблица значений приближаемой функции или число полиномов, составляющих сплайн. Кроме того, здесь M+1 — количество точек осреднения, m+1 — количество точек, входящих в область определения l-го полинома g_l, ξ_l — точка привязки полинома g_l, M-m+1 — число таких точек, значения которых участвуют при определении двух соседних полиномов, составляющих S-сплайн, $M \geq m+1$. Можно предполагать, что значения заданной функции y_k известны с некоторой точностью, например, они есть результаты каких-либо измерений. Будем предполагать тогда, что с уменьшением шага h будет увеличиваться точность измерения, а именно, будем предполагать, что если функция $f \in C^6[a,b]$ задана в узлах равномерной сетки $x_k = a+kh,\ k=0,...,K$ своими значениями y_k, то $\left|y_k - f(x_k)\right| \leq Ch^6$.

Определение. S-сплайном назовем функцию $S_{m,M}(x)$, которая совпадает с полиномом $g_l(x)$ на отрезке $\xi_l \leq x < \xi_{l+1}$.

Обозначим: $S_j = \sum\limits_{k=0}^{M} k^j$, $t_{ijk} = \begin{vmatrix} S_i & S_j & S_k \\ S_{i+1} & S_{j+1} & S_{k+1} \\ S_{i+2} & S_{j+2} & S_{k+2} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} S_6 & S_7 & S_8 \\ S_7 & S_8 & S_9 \\ S_8 & S_9 & S_{10} \end{vmatrix}$, $U = (u_{ij})$:

$$\begin{aligned}
&u_{11} = 1 - t_{378}m^3 - t_{638}m^4 - t_{673}m^5,\ \ u_{12} = m - t_{478}m^3 - t_{648}m^4 - t_{674}m^5 \\
&u_{13} = m^2 - t_{578}m^3 - t_{658}m^4 - t_{675}m^5,\ u_{21} = -3t_{378}m^2 - 4t_{638}m^3 - 5t_{673}m^4 \\
&u_{22} = 1 - 3t_{478}m^2 - 4t_{648}m^3 - 5t_{674}m^4, \\
&u_{23} = 2m - 3t_{578}m^2 - 4t_{658}m^3 - 5t_{675}m^4,\ u_{31} = -3t_{378}m - 6t_{638}m^2 - 10t_{673}m^3 \\
&u_{32} = -3t_{478}m - 6t_{648}m^2 - 10t_{674}m^3,\ u_{33} = 1 - 3t_{578}m - 6t_{648}m^2 - 10t_{675}m^3
\end{aligned} \tag{3}$$

Доказаны следующие теоремы (Силаев, 2007):

Теорема 1. Пусть числа m и $M \geq 3$ таковы, что собственные числа матрицы U (3) не равны корню степени L из единицы (здесь L —число полиномов, составляющих сплайн). Тогда для любой периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ своими значениями y_k в точках $x_k = a+kh, h=(b-a)/K$, существует и единственен периодический сплайн $S_{m,M}[y](x)$.

Теорема 2. Пусть периодическая функция $f(x) \in \mathbf{C}^6[a,b]$ и пусть выполнены предположения $\left|f(x_k) - y_k\right| \leq Ch^{6+\varepsilon}, \varepsilon \geq 0$. Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда периодический сплайн $S^5_{m,M}(x)$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е. $S^5_{m,M}(x) \in \mathbf{C}^2[a,b]$) и для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| f^{(p)}(x) - \frac{d^p}{dx^p} S^5_{m,M}(x) \right| \le C_p h^{6-p}$$

$p = 0,1,2,3,4,5$; $x \ne \xi_l$ при $p = 3,4,5$; $\varphi^{(p)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(p)}(\xi_l + O)$.

Теорема 3. Пусть $\zeta = m/M < \zeta_*$. Тогда при достаточно малых m и больших M собственные числа матрицы устойчивости U по модулю меньше единицы.

Таблица 1. Собственные числа матрицы U.

M	*m*	λ_1	λ_2	λ_3	max $\lvert\lambda_i\rvert$	*m/M*
4	2	-0,008	-0,231-0,131*i*	-0,231+0,131*i*	0,265	0,25
5	3	-0,005	0,0549-0,201*i*	0,0549+0,201*i*	0,207	0,60
6	2	0,0266	-0,285-0,129*i*	-0,285+0,129*i*	0,312	0,33
6	3	-0,008	-0,263-0,0463*i*	-0,263+0,0463*i*	0,266	0,50
7	2	0,0732	-0,167-0,305*i*	-0,167+0,305*i*	0,347	0,285
7	4	-0,0069	-0,0737-0,214*i*	-0,0737+0,214*i*	0,226	0,571
7	6	0,00218	0,116-0,207*i*	0,116+0,207*i*	0,237	0,857
8	4	-0,0079	-0,265-0,031*i*	-0,265+0,031*i*	0,266	0,50
8	5	-0,00403	0,101-0,178*i*	0,101+0,178*i*	0,204	0,625
8	7	0,00180	-0,0466-0,229*i*	-0,0466+0,229*i*	0,233	0,875
9	5	-0,00734	-0,124-0,201*i*	-0,124+0,201*i*	0,235	0,555
9	8	0,00134	-0,205-0,118*i*	-0,205+0,118*i*	0,236	0,888
10	5	-0,0078	-0,263-0,0407*i*	-0,263+0,0407*i*	0,266	0,50
10	6	-0,0055	0,0182-0,213*i*	0,0182+0,213*i*	0,213	0,60
11	7	-0,00322	0,141-0,147*i*	0,141+0,147*i*	0,203	0,636

Это условие устойчивости S-сплайнов аналогично условию устойчивости для кубического случая (Силаев и Якушина, 1984; Силаев и др., 2007). Для случая малых значений M (при $3 \le M \le 20$) в результате расчета были получены значения собственных чисел матрицы U. Оказалось, что при $m/M \le \zeta^* < 1$ все собственные числа матрицы U меньше единицы. Некоторые наиболее интересные полученные значения m и M, при которых достигаются наименьшие значения $\max|\lambda_i|$ и аппроксимация S-сплайнами устойчива, представлены в таблице (табл. 1).

Аналогичные теоремы доказаны и для непериодического случая.

Теорема 4. Пусть функция $f(x) \in \mathbf{C}^6[a,b]$ и пусть $|f(x_k) - y_k| \le Ch^{6+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$. Пусть выполнены предположения $|f'(x_0) - y_0'| \le Ch^{5+\varepsilon}$, $|f''(x_0) - y_0''| \le Ch^{4+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$. Пусть, кроме того, собственные числа матрицы U по модулю меньше единицы. Тогда сплайн $S_{m,M}^5(x)$ с узлами на равномерной сетке имеет дефект 3 (т.е. $S_{m,M}^5(x) \in \mathbf{C}^2[a,b]$) и для $x \in [a,b]$ справедливы следующие оценки:

$$\left| f^{(p)}(x) - \frac{d^p}{dx^p} S_{m,M}^5(x) \right| \le C_p h^{6-p}$$

$p = 0,1,2,3,4,5$; $x \ne \xi_l$ при $p = 3,4,5$; $\varphi^{(p)}(\xi_l) \equiv \varphi^{(p)}(\xi_l + O)$.

Фундаментальный S-сплайн $B_j(x)$ — это периодический или непериодический S-сплайн, построенный по данным $y = (y_0, ..., y_K) \in R^{K+1}$ вида: $\{y_i = \delta_{ij},\, i, j = 0, \ldots, K\}$. Легко видеть, что линейная комбинация $\sum_{j=0}^{K} y_j B_j(x) = S(x)$ является S-сплайном, приближающим начальные данные $\{y_i, i = 0, ..., K\}$. Заметим, что непериодические фундаментальные сплайны дополняются сплайнами с начальными условиями y_0', y_0'', принимающими значения 0 или 1.

Трёхмерный полулокальный сглаживающий сплайн класса C². Построение S-сплайна на шаре. Будем рассматривать на шаре радиуса R сферические сетки:

$$\begin{gathered}\{r_i = ih_1, i = 0,1,...,K_1\}, \{R_{l_1} = l_1 H_1, l_1 = 0,...,L_1\},\\ \{\theta_j = jh_2, j = 0,1,...,K_2\}, \{\Theta_{l_2} = l_2 H_2, l_2 = 0,...,L_2\},\\ \{\varphi_k = kh_3, k = 0,1,...,K_3\}, \{\Phi_{l_3} = l_3 H_3, l_3 = 0,...,L_3\},\end{gathered} \tag{4}$$

где $H_1 = m_1 h_1, K_1 = m_1 L_1, K_1 h_1 = R$, $H_2 = m_2 h_2, K_2 = m_2 L_2$, $K_2 h_2 = \pi$, $H_3 = m_3 h_3$, $K_3 = m_3 L_3, K_3 h_3 = 2\pi$. Будем строить аппроксимацию функции $f(r,\theta,\varphi)$ на шаре при условии, что функция f имеет 6 производных по переменным r, θ и φ, то есть $f \in C^6[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$.

Пусть $\{y_{ijk} = f(r_i,\theta_j,\varphi_k),\ i=0,...,K_1,\ \ j=0,...,K_2,\ k=0,...,K_3\}$ — значения в узлах сетки, по которым будет проводиться аппроксимация. Для каждой пары (θ_j,φ_k) ($j=0,1,...,K_2; k=0,1,...,K_3$) построим непериодический S-сплайн $S_{jk}(r)$ на отрезке $[0,R]$ по начальным данным $\{y_{ijk},\ i=0,1,...,K_1\}$. Каждый из этих сплайнов аппроксимирует функцию $f(r,\theta,\varphi)$ на отрезке $[0,R]$, причем в силу теоремы о сходимости

$$\left|S_{jk}^{(p)}(r) - \frac{\partial^p f(r,\theta_j,\varphi_k)}{\partial r^p}\right| < Ch_1^{6-p}.\ \ p=0,1...,5,\ r\in[0,R]\ .$$

Далее, фиксируем произвольное $\tilde{r}\in[0,R]$. Рассмотрим набор $\{z_{jk} = S_{jk}(\tilde{r}), j=0,...,K_2, k=0,...,K_3\}$. По этой двумерной таблице строим двумерный непериодический по θ и периодический по φ $S_{\tilde{r}}$ – сплайн. При выполнении условий устойчивости $m_i < \zeta^* M_i$ собственные значения матрицы U по модулю будут меньше единицы. Тогда, построенный для $\tilde{r}$ сплайн $S_{\tilde{r}}(\theta,\varphi)$ будет аппроксимировать функцию $f(\tilde{r},\theta,\varphi)$ при $(\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$ с порядком $O(h^6)$, $h=\max(h_i)$.

Сходимость S-сплайна. Обозначим $h=\max(h_i)$, $i=1,2,3$.

Теорема 5. Пусть $m_i < \zeta^* M_i$, $i=1,2,3$ и $f\in C^6([0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi])$. Тогда для S_r — сплайна справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial r^{p_1}\partial\theta^{p_2}\partial\varphi^{p_3}} S(r,\theta,\varphi) - \frac{\partial^p}{\partial r^{p_1}\partial\theta^{p_2}\partial\varphi^{p_3}} f(r,\theta,\varphi)\right| < C_p h^{6-p}, \tag{5}$$

где $p = p_1+p_2+p_3, 0\le p\le 5.$

Здесь частная производная понимается в следующем смысле: сплайн $S_{jk}(r)$, как функция r, p_1 раз дифференцируем (в случае $p_1>2$ в точках склейки берется односторонняя производная, например, левая).

По значениям $\dfrac{d^{p_1} S_{jk}(r)}{dr}$ строится двумерный сплайн $S_{\tilde{r}}^{p_1}(\theta,\varphi)$, от которого аналогично предыдущему вычисляется производная $\dfrac{\partial^{p_2+p_3}}{\partial\theta^{p_2}\partial\varphi^{p_3}}$.

Получение S-сплайна на шаре как явной функции трёх переменных. Обозначим $A_i(r), B_j(\theta), C_k(\varphi)$ фундаментальные сплайны по аргументам r,θ,φ.

$$\begin{aligned} S(r,\theta,\varphi) &= \left\{ S_{jk}(r) \middle| \{z_{jk} = S_{jk}(r), j=0,...,K_2, k=0,...,K_3\} \right\} = \\ &= S_{jk}(r) = \sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} z_{jk} B_j(\theta) C_k(\varphi) = \sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} B_j(\theta) C_k(\varphi) \sum_{i=0}^{K_1} y_{ijk} A_i(r) = \\ &= \sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk} A_i(r) B_j(\theta) C_k(\varphi) \end{aligned} \qquad (6)$$

Теперь рассмотрим укрупненную сетку в шаре (R_i, Θ_j, Φ_k), где $R_i = iH_1, \Theta_j = jH_2, \Phi_k = kH_3$. Рассмотрим вид S-сплайна в некотором произвольном шаровом секторе этой сетки: $r = l_1 H_1 + \tilde{r}$, $\theta = l_2 H_2 + \tilde{\theta}$, $\varphi = l_3 H_3 + \tilde{\varphi}$, где $0 \le \tilde{r} < H_1$, $0 \le \tilde{\theta} < H_2$ и $0 \le \tilde{\varphi} < H_3$. В этом секторе фундаментальные S-сплайны согласно определению представляются в виде полиномов пятой степени: $A_i(r) = \sum_{p=0}^{5} a_{ip} \tilde{r}^p$, $B_j(\theta) = \sum_{p=0}^{5} b_{jp} \tilde{\theta}^p$, $C_k(\varphi) = \sum_{p=0}^{5} c_{kp} \tilde{\varphi}^p$. Подставляя эти выражения в формулу (6) для функции $S(r,\theta,\varphi)$ и меняя порядок суммирования, получим:

$$\begin{aligned} S(r,\theta,\varphi) &= \sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk} \sum_{p=0}^{5} a_{ip}^{l_1} \tilde{r}^p \sum_{q=0}^{5} b_{jq}^{l_2} \tilde{\theta}^q \sum_{s=0}^{5} c_{ks}^{l_3} \tilde{r}^s = \\ &= \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5}\sum_{s=0}^{5} \tilde{r}^p \tilde{\theta}^q \tilde{\varphi}^s \Big(\sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk} a_{ip}^{l_1} b_{jq}^{l_2} c_{ks}^{l_3}\Big) = \sum_{p=0}^{5}\sum_{q=0}^{5}\sum_{s=0}^{5} d_{pqs}^{l_1 l_2 l_3} \tilde{r}^p \tilde{\theta}^q \tilde{\varphi}^s, \end{aligned}$$

где $d_{pqs}^{l_1 l_2 l_3} = \sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk} a_{ip}^{l_1} b_{jq}^{l_2} c_{ks}^{l_3}$.

Таким образом, показано, что на каждом произвольном шаровом секторе функция $S(r,\theta,\varphi)$ представляет собой полином пятой степени или сплайн-функцию трёх переменных. Заметим, что в выражения для коэффициентов $d_{pqs}^{l_1 l_2 l_3}$ входят значения всех y_{ijk}, содержащихся в шаре. Аналогичные выражения можно получить для всех многомерных областей, представляющих собой тензорные произведения одномерных, например, для параллелепипеда и тора.

Представление сплайна на шаре в виде разложения по одномерным фундаментальным сплайнам (6) позволяет определить понятие смешанной производной для трёхмерного сплайна:

Определение. Под смешанной производной трёхмерного сплайна $\dfrac{\partial^{p+q+r}}{\partial r^p \partial\theta^q \partial\varphi^r} S(r,\theta,\varphi)$, $d_{pqs}^{l_1 l_2 l_3}$, $0 \le p+q+r \le 5$ понимается конечная сумма $\sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk} \dfrac{d^p}{dr^p} A_i(r) \dfrac{d^q}{d\theta^q} B_j(\theta) \dfrac{d^r}{d\varphi^r} C_k(\varphi)$, состоящая из формальных производных от соответствующих фундаментальных сплайнов по r, θ и φ.

Эту формулу можно рассматривать как формулу численного дифференцирования, основанную на приближении трёхмерной функции полулокальным сглаживающим сплайном.

Всё то же самое верно и для сплайнов, если в них изменить порядок аппроксимации, например, сначала построить периодический сплайн по φ при фиксированных (r_i, θ_j), а затем по полученной двумерной таблице построить непериодический $r-\theta$ сплайн.

Получение квадратурных формул для одномерных интегралов. Подставим выражение сплайна через фундаментальные сплайны в интеграл $\int_A^B S(x)dx = \int_A^B \sum_{k=0}^{K} y_k B_k(x)dx = \sum_{k=0}^{K} y_k \int_A^B B_k(x)dx = \sum_{k=0}^{K} y_k c_k$, где $c_k = \int_A^B B_k(x)dx = \sum_{n=0}^{L-1}\sum_{i=0}^{5} \dfrac{a_i^{nk}}{i+1} H^{i+1}$ — искомые коэффициенты квадратуры. Здесь $a_i^{n,k}$ — i–й коэффициент n-го полинома в k-м базисном сплайне (т.е. построенном по набору начальных данных $\{y_i = \delta_{ik}, i = 0,...,K\}$). Эти формулы имеют 6-й порядок аппроксимации.

Получение квадратурных формул для двумерных интегралов на круге K. Подставим в интеграл по единичному кругу K выражение для S-сплайна:

$$\iint_K S(\varphi,r)\,d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^1 S(\varphi,r)rdrd\varphi =$$

$$\sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij}\int_0^{2\pi} C_i(\varphi)d\varphi\int_0^1 D_j(r)rdr = \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c_i d_j y_{ij}\ , \tag{7}$$

где $c_i = \int_0^{2\pi} C_i(\varphi)d\varphi = \sum_{n=0}^{L_1-1}\sum_{p=0}^{5} a_p^{in}\dfrac{H_1^{p+1}}{p+1}$, $d_j = \int_0^1 D_j(r)rdr = \sum_{s=0}^{L_2-1}\int_{\xi_s}^{\xi_{s+1}} rD_j(r)dr =$

$$= \sum_{s=0}^{L_2-1}\int_0^{H_2}(u+\xi_s)\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}u^q du = \sum_{s=0}^{L_2-1}\int_0^{H_2}\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}(u^{q+1}+sH_2u^q)du =$$

$= \sum_{s=0}^{L_2-1}\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}H_2^{q+2}(\dfrac{1}{q+2}+\dfrac{s}{q+1})$. Здесь a_p^{in} и b_q^{js} — p-й и q-й коэффициенты n-го и s-го полиномов в i-м и j-м фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0,2\pi]$ и непериодическом сплайне на отрезке $[0,1]$. Здесь $H_1 = \dfrac{2\pi}{L_1}$, фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{ik}, k = 0,1,...,K_1\}$; $H_2 = \dfrac{1}{L_2}$, непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk}, k = 0,1,...,K_2; y_0', y_0''\}$, где y_0', y_0'' принимают значения либо 0, либо 1 (как правило, $y_0' = 0$ в силу особенностей полярной системы координат).

Кубатурные формулы для трёхмерных интегралов на шаре. Подставим в интеграл по шару B радиуса R выражение для S - сплайна:

$$\iiint_B S(r,\theta,\varphi)dV = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} S(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi =$$

$$\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk}A_i(r)B_j(\theta)C_k(\varphi)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} a_i b_j c_k y_{ijk}\ ,$$

где

$$a_i = \int_0^R A_i(r) r^2 dr = \sum_{l=0}^{L_1-1} \int_0^{H_1} (u + \xi_l)^2 \sum_{p=0}^{5} a_p^{il} u^p du =$$

$$\sum_{l=0}^{L_1-1} \int_0^{H_1} \sum_{p=0}^{5} a_p^{il} (u^{p+2} + 2lH_1 u^{p+1} + l^2 H_1^2 u^p) du =$$

$$\sum_{l=0}^{L_1-1} \sum_{p=0}^{5} a_p^{il} H_1^{p+3} \left(\frac{1}{p+3} + \frac{2l}{p+2} + \frac{l^2}{p+1}\right),$$

$$b_j = \int_0^{\pi} B_j(\theta) \sin\theta d\theta = \sum_{s=0}^{L_2-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} \int_0^{H_2} u^q \sin(u + \xi_s) du =$$

$$= \sum_{s=0}^{L_2-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} (\cos sH_2 \int_0^{H_2} u^q \sin u du + \sin sH_2 \int_0^{H_2} u^q \cos u du),$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} C_k(\varphi) d\varphi = \sum_{t=0}^{L_3-1} \sum_{r=0}^{5} c_r^{kt} \frac{H_3^{p+1}}{p+1}. \qquad (8)$$

Интегралы $J(q, \sin u, H) = \int_0^{H_2} u^q \sin u du$, $J(q, \cos u, H) = \int_0^{H_2} u^q \cos u du$ вычисляются по рекуррентным формулам:

$$J(q, \sin u, H) = -H^q \cos H + q J(q-1, \cos u, H),\ J(0, \sin u, H) = 1 - \cos H,$$

$$J(q, \cos u, H) = H^q \sin H - qJ(q, \sin u, H), \quad J(0, \cos u, H) = \sin H.$$

Здесь a_p^{il}, b_q^{js} и c_r^{kt} — p-й, q-й и r-й коэффициенты l-го, s-го и t-го полиномов в i-м, j-м и k-м фундаментальном непериодическом сплайне на отрезке $[0, R]$, фундаментальном непериодическом сплайне на отрезке $[0, \pi]$ и фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0, 2\pi]$. Здесь $H_1 = \frac{1}{L_1}$, непериодический фундаментальный сплайн $A_i(r)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk}, k = 0,1,...,K_2; y_0', y_0''\}$, где y_0', y_0'' принимают значения либо 0, либо 1. Аналогично $H_2 = \frac{\pi}{L_2}$, непериодический фундаментальный сплайн $B_j(\theta)$ строится по набору данных $\{y_k = \delta_{jk}, k = 0,1,...,K_2; y_0', y_0''\}$, где y_0', y_0'' принимают значения либо

0, либо 1. И наконец, фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{ y_k = \delta_{ik}, k = 0,1,...,K_1 \}$, $H_3 = \dfrac{2\pi}{L_3}$.

Квадратурные формулы для двумерных односвязных областей. На плоскости рассматривается ограниченная область Ω с границей $\gamma = \partial\Omega$, где γ — замкнутая самонепересекающаяся кусочно-гладкая кривая. Предполагается, что граница задана параметрически: $\{ \gamma = \{ \tilde{x}(t), \tilde{y}(t) \}, t \in [\alpha, \beta] \}$, где $\tilde{x}, \tilde{y} \in C^{1+\varepsilon}$ — заданные периодические функции, т.е. $\tilde{x}(\alpha) = \tilde{x}(\beta), \tilde{y}(\alpha) = \tilde{y}(\beta)$, первые производные функций $\tilde{x}, \tilde{y}$ удовлетворяют условию Гельдера с порядком $\varepsilon > 0$ (быть может, за исключением отдельных точек). В области Ω рассматривается гладкая функция $f \in C^6(\Omega)$. Построение аппроксимирующей сетки будем производить следующим образом. Поместим область Ω в круг K радиуса R и введём полярную систему координат, связанную с центром круга. Будем рассматривать на круге радиуса R полярные сетки:

$$
\begin{gathered}
\{r_i = ih_1, i = 0,1,...,K_1\}, \{R_l = lH_2, l = 0,1,...,L_1\}, \\
\{\varphi_j = jh_2, j = 0,1,...,K_2\}, \{\Phi_k = kH_2, k = 0,1,...,L_2\}, \\
H_1 = m_1h_1, K_1 = m_1L_1, K_1h_1 = R, H_2 = m_2h_2, K_2 = m_2L_2, K_2h_2 = 2\pi
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Будем предполагать, что функция f продолжена в круг радиуса R с сохранением гладкости. В дальнейшем, мы покажем, что получающаяся квадратурная формула не зависит от способа продолжения. Будем считать, что задана гладкая функция $u(\varphi, r) \in C^6(K)$, которая совпадает с функцией f в области Ω. Пусть $u_{ij} = u(\varphi_i, r_j)$ — сужение функции u на равномерную сетку (9). По таблице значений u_{ij} строим полулокальный сглаживающий сплайн $S(r,\varphi)$, состоящий из полиномов пятой степени, например, $r-\varphi$-сплайн, определенный на всем круге *K*. Из оценки (5) следует, что S аппроксимирует функцию f с порядком $O(h^6)$, где $h = \max(h_1, h_2)$ в области Ω. Подставим в интеграл по области Ω выражение для $r-\varphi$ - сплайна в виде (6):

$$
\iint_{\Omega} S(\varphi, r) d\Omega = \iint_{\Omega} S(\varphi, r) r dr d\varphi = \sum_{i=0}^{K_1-1} \sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \ ,
$$

где $c^{ij} = \iint\limits_{\Omega} C_i(\varphi) D_j(r) r dr d\varphi$ (10)

Заметим, что выражение в (10), стоящее под знаком интеграла, что весьма существенно, есть произведение функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. Применять формулы типа (7) становится неудобно, так как граница γ будет проходить внутри части секторов (см. п. Получение S-сплайна на шаре как явной функции трёх переменных). Произведем универсализацию вычисления интегралов в (10). Для их вычисления применим формулу Грина-Стокса:

$$\oint\limits_{\gamma} (\vec{a}, \vec{\tau}) ds = \iint\limits_{\Omega} (rot\vec{a}, \vec{k}) d\Omega,$$

где $\vec{a} = \{P, Q, 0\}$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к кривой γ, ограничивающей область Ω, $\vec{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный плоскости области Ω. Линейная форма имеет вид

$$(\vec{a}, \vec{\tau}) ds = P dx + Q dy = P_r dr + r Q_\varphi d\varphi,$$

где $P_r = P\cos\varphi + Q\sin\varphi$, $Q_\varphi = -P\sin\varphi + Q\cos\varphi$. Выражение для ротора в полярной системе координат:

$$rot\,\vec{a} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial \varphi}\right)\vec{k}.$$

Поэтому

$$c^{ij} = \iint\limits_{\Omega} C_i(\varphi) D_j(r) r dr d\varphi = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial \varphi}\right) r dr d\varphi = \oint\limits_{\gamma} P_r dr + r Q_\varphi d\varphi.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rQ_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial P_r}{\partial \varphi} = C_i(\varphi) D_j(r). \qquad (11)$$

Этому уравнению удовлетворяют

$$P_r = 0, \; Q_\varphi = \frac{1}{r} C_i(\varphi) \int\limits_0^r D_j(t) t dt.$$

Иными словами, в качестве функции $r\,Q_\varphi(\varphi, r)$ возьмем первообразную от функции $rD_j(r)$ (по r), умноженную на $C_i(\varphi)$. Заметим, что эта первообразная есть сплайн, состоящий из полиномов седьмой степени.

Константу интегрирования в первообразной выберем так, чтобы $Q_\varphi(\varphi,0)=0.$ Отсюда получаем

$$c^{ij} = \oint_\gamma C_i(\varphi)(\int_0^r D_j(t)tdt)d\varphi \tag{12}$$

Обратим внимание, что непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r)$=0 при $r<r_j$, если точка с координатами (φ_i, r_j) не принадлежит некоторой области $\Omega_\delta \supset \Omega$. Поэтому $Q_\varphi(r,\varphi)=0$ при $r<r_j$. Итак, показано, что все коэффициенты c^{ij} равны нулю для таких пар (i,j), при которых точки с координатами $(r_j,\varphi_i)\notin\Omega_\delta$, где $\delta=\delta(M,m,h)$.

Частный случай «простой» двумерной области. Область назовём *«простой»*, если внутри её найдётся такая точка, что любой луч, выпущенный из неё, пересечёт границу области только в одной точке. Поместим начало координат в эту точку и введём полярную систему координат. Тогда граница γ области Ω задается функцией $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi]$. Зафиксируем некоторое φ. Пусть $j=l_1m+j'$, $0\le j'<m$, т.е. $r_j\in[\xi_{l_1};\xi_{l_1+1})$, а $r(\varphi)\in[\xi_{l_2};\xi_{l_2+1})$ (заметим, что $l_2=l_2(\varphi)$ зависит от угла φ и границы области Ω). Тогда $D_j(r)\equiv 0$ при $r\le\xi_{l_1}$ и

$$\int_0^{r(\varphi)} tD_j(t)dt = \sum_{s=l_1}^{l_2-1}\int_{\xi_s}^{\xi_{s+1}} tD_j(t)dt + \int_{\xi_{l2}}^{r(\varphi)} tD_j(t)dt = \sum_{s=l_1}^{l_2-1}\int_0^{H_2}(u+\xi_s)\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}u^q du +$$

$$\int_0^{r(\varphi)-\xi_{l_2}}(u+\xi_{l_2})\sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2}u^q du = \sum_{s=l_1}^{l_2-1}\int_0^{H_2}\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}(u^{q+1}+sH_2u^q)du +$$

$$\int_0^{r(\varphi)-\xi_{l_2}}\sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2}(u^{q+1}+l_2H_2u^q)du = \sum_{s=l_1}^{l_2-1}\sum_{q=0}^{5} b_q^{js}H_2^{q+2}(\frac{1}{q+2}+\frac{s}{q+1}) +$$

$$\sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2}(\frac{(r(\varphi)-l_2H_2)^{q+2}}{q+2} + l_2H_2\frac{(r(\varphi)-l_2H_2)^{q+1}}{q+1}).$$

Поэтому

$$\tilde{n}^{ij} = \oint_\gamma \sum_{s=l_1}^{l_2(\varphi)-1} \sum_{q=0}^{5} b_q^{js} H_2^{q+2} \left(\frac{1}{q+2} + \frac{s}{q+1}\right) C_i(\varphi)\, d\varphi +$$
$$\sum_{q=0}^{5} b_q^{jl_2} \oint_\gamma \mathrm{C_i}(\varphi) \left(\frac{(r(\varphi) - l_2(\varphi) H_2)^{q+2}}{q+2} + l_2(\varphi) H_2 \frac{(r(\varphi) - l_2(\varphi) H_2)^{q+1}}{q+1} \right) d\varphi \qquad (13)$$

где $C_i(\varphi) = \sum_{n=0}^{L_1-1} \sum_{p-0}^{5} a_p^{in} \varphi^p$. Здесь a_p^{in} и b_q^{js} — *p*-й и *q*-й коэффициенты n-го и s-го полиномов в i-м и j-м фундаментальном периодическом сплайне на окружности $[0, 2\pi]$ и непериодическом сплайне на отрезке $[0; R]$, $H_1 = \frac{2\pi}{L_1}$. Фундаментальный периодический сплайн $C_i(\varphi)$ строится по набору данных $\{ y_k = \delta_{ik}, k = 0,1,..., K_1 \}$; $H_2 = \frac{1}{L_2}$, непериодический фундаментальный сплайн $D_j(r)$ строится по набору данных $\{ y_k = \delta_{jk}, k = 0,1,..., K_2; y_0', y_0'' \}$, где y_0', y_0'' принимают значения либо 0, либо 1.

Оценка точности квадратурной формулы для двумерных односвязных областей. Обозначим $h = max(h_1, h_2)$. Пусть выполнены условия устойчивости матрицы U, например, $m_1 < M_1 \varsigma_*$, $m_2 < M_2 \varsigma_*$, и пусть $f \in C^6(\Omega_\delta)$, где $\Omega_\delta \supset \Omega$, т.е. мы предполагаем, что функция f определена и шесть раз непрерывно дифференцируема в несколько большей области $\Omega_\delta \supset \Omega$. Поместим область Ω_δ в круг *K* радиуса *R*. Введем полярную систему координат, взяв за начало координат центр круга *K*. Продолжим функцию f в $K \setminus \Omega_\delta$ тождественным нулем. Обозначим $S(\varphi, r)$ — $r - \varphi$-сплайн, приближающий таким образом продолженную функцию f на круге *K*.

Теорема 6. Пусть $S(\varphi, r)$ — $r - \varphi$-сплайн, приближающий функцию f, пусть $(M + m)h \le \rho(\gamma_\delta, \gamma)$. Здесь $\rho(\gamma_\delta, \gamma)$ — расстояние между границами областей Ω_δ и Ω соответственно. Тогда справедлива оценка:

$$\left| \iint_{\Omega} f(x,y)d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le Ch^6 \qquad (14)$$

Здесь $y_{ij} = f(\varphi_i, r_j)$ - значения функции f в узлах сетки, весовые коэффициенты c^{ij} определены формулами (10)-(13), суммирование производится лишь по тем индексам i и j, для которых $(\varphi_i, r_j) \in \Omega_\delta$.

Доказательство. Заметим, что $\sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} = 1$, т.к. $S(\varphi,r) \equiv 1$, если $f \equiv 1$. Из (5) следует, что $\left|S(\varphi,r) - f(\varphi,r)\right| < C_{00}h^6$. Поэтому

$$\left| \iint_{\Omega} f(x,y)d\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le \left| \iint_{\Omega} f(x,y)d\Omega - \iint_{\Omega} Sd\Omega \right| +$$

$$\left| \iint_{\Omega} Sd\Omega - \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} c^{ij} y_{ij} \right| \le$$

$$C_{00}h^6\ mes(\Omega) + \left| \iint_{\Omega} (S - \sum_{i=0}^{K_1-1}\sum_{j=0}^{K_2} y_{ij} C_i(\varphi) D_j(r)) d\Omega \right|$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как $C_i(\varphi)\ D_j(r) = 0$ в области Ω для тех пар индексов i *и* j, для которых $(\varphi_i, r_j) \notin \Omega_\delta$.

Если заданную функцию f приближать $\varphi - r$-сплайном, то оценка (14) также будет справедлива, так как на круге K он отличается от $r - \varphi$-сплайна на величину $O(h^6)$.

Кубатурные формулы для трехмерных односвязных областей. В пространстве R^3 рассматривается ограниченная область V с границей $\Gamma = \partial V$, где Γ — замкнутая самонепересекающаяся кусочно-гладкая поверхность. Предполагается, что граница задана параметрически: $\Gamma = \{x = x(u,v), y = y(u,v), z = (u,v); (u,v) \in \Omega\}$, где $x, y, z \in C^{1+\varepsilon}$ — заданные функции, т.е. первые производные функций x, y, z удовлетворяют условию Гельдера с порядком $\varepsilon > 0$ (быть может, за исключением отдельных точек). В области V рассматривается гладкая функция $f \in C^6(V)$. Построение аппроксимирующей сетки будем производить следующим образом. Поместим область V в шар B радиуса R и введём сферическую систему координат, связанную с центром шара. Будем рассматривать в шаре радиуса R сферические сетки (4). Будем предполагать, что функция f продолжена в шар радиуса R с сохранением гладкости. Будем считать, что задана гладкая функция $u(r,\theta,\varphi)\in C^6(B)$, которая совпадает с функцией f в области V. Пусть $u_{ijk}=u(r_i,\theta_j,\varphi_k)$ — сужение функции u на равномерную сетку (4). По таблице значений u_{ijk} строим полулокальный сглаживающий сплайн $S(r,\theta,\varphi)$, состоящий из полиномов пятой степени, определенный на всем шаре B. Из оценки (5) следует, что S аппроксимирует функцию f с порядком $O(h^6)$, где $h=\max(h_1,h_2,h_3)$ в области V. Подставим в интеграл по области V выражение для S - сплайна в виде (6):

$$\iiint_V S(r,\theta,\varphi)dV=\iiint_V S(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi=$$

$$=\iiint_V \sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} y_{ijk}A_i(r)B_j(\theta)C_k(\varphi)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$=\sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} c^{ijk}y_{ijk},$$

где $$c^{ijk}=\iiint_V A_i(r)B_j(\theta)C_k(\varphi)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \qquad (15)$$

Заметим, что выражение в (15), стоящее под знаком интеграла, что весьма существенно, есть произведение функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. Применять формулы типа (8) становится неудобно, так как граница Г будет проходить внутри части шаровых секторов (см. п. Кубатурные формулы для трехмерных интегралов на шаре). Произведем универсализацию вычисления интегралов в (15). Для их вычисления применим формулу Гаусса-Остроградского:

$$c^{ijk}=\oint\!\!\oint_\Gamma(\vec a,\vec n)dS=\iiint_V div\vec a dV=\iiint_V A_i(r)B_j(\theta)C_k(\varphi)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Для векторного поля $\vec a=\{P_r,P_\theta,P_\varphi\}$

$$div\overline{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}P_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}P_\varphi+\frac{1}{r}ctg\theta P_\theta$$

(в сферической системе координат). Выберем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2P_r)=A_i(r)B_j(\theta)C_k(\varphi),\ P_\theta=P_\varphi=0.$$

Тогда $P_r = B_j(\theta)C_k(\varphi)\dfrac{1}{r^2}\int\limits_0^r A_i(r)r^2dr$, где $\int\limits_0^r A_i(r)r^2dr$ - первообразная от функции $A_i(r)r^2$. Эта первообразная является сплайном, состоящим из полиномов восьмой степени. Отсюда получаем

$$c^{ijk} = \oiint\limits_{\Gamma}(\vec{a},\vec{n})dS = \oiint\limits_{\Gamma} P_r n_r dS \tag{16}$$

где dS — элемент поверхности Γ, n_r — первая компонента единичного вектора внешней нормали к поверхности Γ. Обратим внимание, что непериодический фундаментальный сплайн $A_i(r)$=0 при $r < r_i$, если точка с координатами $(r_i, \theta_j, \varphi_k)$ не принадлежит некоторой области $V_\delta \supset V$. Поэтому $P_r(r,\theta,\varphi) = 0$ при $r < r_i$.

Частный случай «простой» трехмерной области. Область назовём *«простой»*, если внутри её найдётся такая точка, что любой луч, выпущенный из неё, пересечёт границу области только в одной точке. Поместим начало координат в эту точку и введём сферическую систему координат. Тогда поверхность Γ — граница области V задается функцией $r = R(\theta,\varphi)$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [0,2\pi]$. Найдем выражение для элемента поверхности dS в этом случае. Вычислим гауссовские коэффициенты E, F, G. Имеем:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta, r = R(\theta,\varphi)$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (R_\theta\sin\theta + R\cos\theta)\cos\varphi & (R_\theta\sin\theta + R\cos\theta)\sin\varphi & R_\theta\cos\theta - R\sin\theta \\ R_\varphi\sin\theta\cos\varphi - R\cos\theta\sin\varphi & R_\varphi\sin\theta\sin\varphi + R\cos\theta\cos\varphi & R_\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$E = (x'_\theta)^2 + (y'_\theta)^2 + (z'_\theta)^2 = R_\theta^2 + R^2, F = x'_\theta x'_\varphi + y'_\theta y'_\varphi + z'_\theta z'_\varphi = R_\theta R_\varphi,$$

$$G = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = R_\varphi^2 + R^2\sin^2\theta.$$

Элемент поверхности Γ:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\theta d\varphi = R\sqrt{R_\varphi^2 + (R_\theta^2 + R^2)\sin^2\theta}\,d\theta d\varphi.$$

Найдем выражение для внешней нормали к поверхности Γ. Граница области V поверхность Γ является поверхностью уровня $\Phi(r,\theta,\varphi) = r - R(\theta,\varphi) = 0$. В сферической системе координат $grad\Phi = \left\{\Phi_r, \frac{1}{r}\Phi_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}\Phi_\varphi\right\} = \left\{1, -\frac{1}{r}R_\theta, \frac{1}{r\sin\theta}R_\varphi\right\}$. На поверхности Γ первая компонента вектора внешней нормали $n_r = (R\sin\theta)/\sqrt{(R^2 + R_\theta^2)\sin^2\theta + R_\varphi^2}$. По формуле (16) отсюда получаем:

$$c^{ijk} = \oint\!\!\oint_\Gamma (P_r R\sin\theta)/\sqrt{(R^2 + R_\theta^2)\sin^2\theta + R_\varphi^2}\, dS = \iint_\Omega P_r R^2 \sin\theta d\Omega$$

Здесь Ω — цилиндр размера $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ (входящие в формулу функции являются периодическими по переменной φ с периодом 2π). Подставляя выражение для компоненты P_r, окончательно получим:

$$c^{ijk} = \iint_\Omega P_r R^2 \sin\theta d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} B_j(\theta)\sin\theta C_k(\varphi)\left(\int_0^{R(\theta,\varphi)} r^2 A_i(r)dr\right)d\theta d\varphi \qquad (17)$$

Заметим, что входящий в формулу (17) двумерный интеграл может быть вычислен с помощью двумерной квадратуры (см. п. Частный случай «простой» двумерной области), а также с использованием квадратуры без насыщения. В последнем случае узлы квадратурной формулы по переменной φ в ней распределены равномерно, а узлы по переменной θ — по нулям полинома Чебышева (Бабенко, 2002).

Теорема 7. Пусть $S(r,\theta,\varphi)$ — полулокальный сглаживающий сплайн, приближающий функцию f, пусть $(M+m)h \le \rho(\gamma_\delta,\gamma)$. Здесь $\rho(\gamma_\delta,\gamma)$ - расстояние между границами областей V_δ и V соответственно. Тогда справедлива оценка:

$$\left| \iiint_V (f(r,\theta,\varphi) - \sum_{i=0}^{K_1}\sum_{j=0}^{K_2}\sum_{k=0}^{K_3-1} c^{ijk} y_{ijk} \right| \le Ch^6$$

Здесь $y_{ijk} = f(r_i,\theta_j,\varphi_k)$ - значения функции f в узлах сетки, весовые коэффициенты c^{ijk} определены формулами (16),(17), суммирование производится лишь по тем индексам i , j и k для которых $(r_i,\theta_j,\varphi_k) \in V_\delta$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Силаев Д.А., Якушина Г.И. Приближение S-сплайнами гладких функций // *Труды семинара имени И.Г. Петровского.* Вып. 10. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 197–206.

Силаев Д.А. Дважды непрерывно дифференцируемые S-сплайны // *Вестн. Моск. Ун-та.* Сер. 1, математика, механика. — 2007. — № 2. — С. 12–17.

Силаев Д.А., Коротаев Д.О. Решение краевых задач с помощью S-сплайна // *Математика. Компьютер. Образование: Сб. научн. трудов.* Том 2. Под ред. Г.Ю.Ризниченко. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. — С. 85–104.

Силаев Д.А., Амилющенко А.В., Лукьянов А.И., Коротаев Д.О. Полулокальные сглаживающие сплайны класса C^1 // *Труды семинара имени И.Г. Петровского.* Вып. 26. — 2007. — С. 347–367.

Силаев Д.А. О квадратурных формулах высокого порядка аппроксимации для произвольных областей // *Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики: Международная научная конференция*, Тамбов, 22–25 апреля 2008 г./ отв. ред. А.А.Артемов. — Тамбов: Изд-во Першина Р.В., 2008. — С. 65–70.

Бабенко К.И. Основы численного анализа. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

Силаев Д.А., Коротаев Д.О., Капустин С.В. Применение дважды непрерывно дифференцируемого S-сплайна // *Вестник ЮУпГУ*, сер. «Математика, физика, химия. — 2009. — №10. —. Вып. 12. — С. 37–43.

Silaev D.A., Amiliyushenko A.V., Luk'janov A.I., and Korotaev D.O. Semilocal smoothing spline of class C^1 // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2007. — Vol. 143, No. 4. — P. 3401–3414.

ABOUT CUBATURE FORMULAS OF HIGH-ORDER APPROXIMATION FOR A WIDE CLASS OF DOMAINS

Silaev D. A., Korotaev D. O.

This article is dedicated to use of 5th-order smoothing S-splines. Such splines are piecewise polynomial functions. First three coefficients are defined by condition of smoothing of 2nd order, while another three coefficients – by method of minimal squares. These splines are used for building of quadrature and cubature formulas of 6th order of approximation for one-, two- and three-dimensional simply connected domains. Corresponding estimations are also given.