КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Есина А. И.

В этой работе исследовался спектр оператора $H(x,-ih\frac{d}{dx}) = -h^2\frac{d^2}{dx^2} + i(\cos x + \cos 2x)$ *при* $h \to 0$ *(т.е. в квазиклассическом пределе). Для решения этой задачи была использована техника линий Стокса, разработанная М.В. Федорюком (1966). Работу можно разбить на две части, одна из которых является результатом компьютерных вычислений. В результате получены уравнения на точки спектра и спектральный граф, в* $O(h^2)$ *окрестности которого находятся точки спектра рассматриваемого оператора.*

Введение. Рассмотрим спектр оператора

$$H(x,-ih\frac{d}{dx}) = -h^2\frac{d^2}{dx^2} + iV(x) \text{ при } h \to 0. \tag{1}$$

Пусть $V(x) = \cos x + \cos 2x$.

Особенность этой задачи заключается в наличии комплексного коэффициента i перед потенциалом, что делает наш оператор несамосопряженным, и тем самым значительно усложняет задачу. Подобного рода задачи появляются в магнитной гидродинамике (проблема гидромагнитного динамо, т.е. происхождения и сохранение магнитных полей проводящей жидкости).

Ранее исследованные случаи:

- $V(x) = x$, $x \in [0,1]$ и $x \in [-1,1]$ или $V(x)$ близко к x. В этом случае уравнение (1) — это уравнение Эйри.
- $V(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ и $x \in [-1,1]$. В этом случае уравнение (1) — это уравнение Вебера. Это работы двух групп математиков:
  1. С.А. Степин (1995), А.А. Аржанов и др.
  2. С.Н. Туманов, А.А. Шкаликов (2002) и др.

- $V(x) = \cos x$. Случай исследовали А.И. Шафаревич и С.В. Гальцев (2006).

Результаты.

Теорема 1. Спектр сосредоточен в $O(h^2)$ окрестности конечного числа аналитических кривых на комплексной плоскости E, которые в совокупности называются спектральным графом.

Теорема 2. Точки спектра находятся в $O(h^2)$ окрестностях решений уравнений

$$\int_{x_j}^{x_i} \sqrt{iV(x) - E}\,dx = i\pi h(n_{ij} + \gamma/2),$$

где n_{ij} — целые числа, $\gamma = 0,1$, x_i *и* x_j — нули подынтегрального выражения.

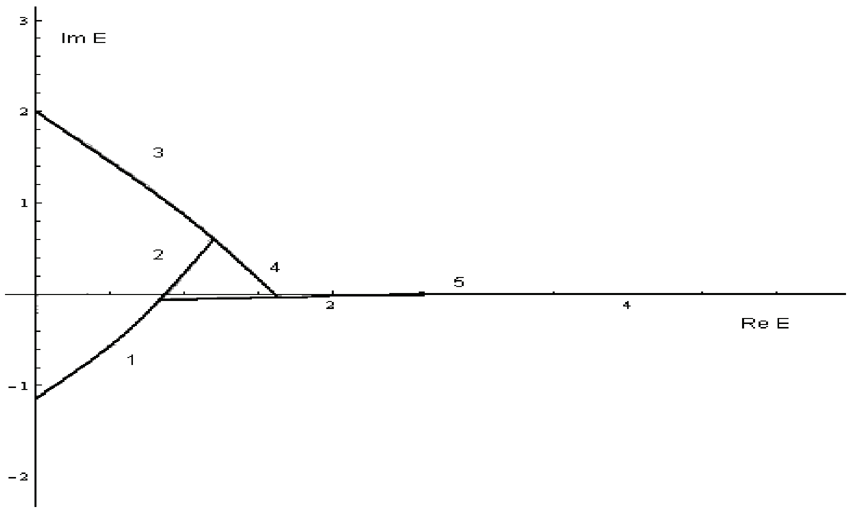

Рис. 1. Спектральный граф для $V(x) = \cos x + \cos 2x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Гальцев С.В., Шафаревич А.И. Спектр и псевдоспектр несамосопряженного оператора Шредингера с периодическими коэффициентами // *Математические заметки*. — 2006. — Т. 80, № 3. — С. 356–366.

Евграфов М.А., Федорюк М.В. Асимптотика решений уравнений $W'' - p(z,\lambda)W = 0$ при $\lambda \to \infty$ в комплексной плоскости // *УМН.* — 1966. — Т. 21, № 1. — С. 3–50.

Степин С.А. Несамосопряженные сингулярные возмущения: модель перехода от дискретного спектра к непрерывному // *УМН.* — 1995. — Т. 50, № 6. — С. 219–220.

Туманов С.Н., Шкаликов А.А. О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля // *Известия РАН, серия Математика*. — 2002. — Т. 66, № 4. — С. 174–204.

SEMI-CLASSICAL SPECTRUM OF SCHRÖDINGER OPERATOR WITH COMPLEX POTENTIAL

Esina A. I.

In this work we investigated spectrum of $H(x,-ih\frac{d}{dx}) = -h^2\frac{d^2}{dx^2} + i(\cos x + \cos 2x)$ *operator at* $h \to 0$ *(semi-classical limit) using Stokes lines technique. Computer-aided calculations were an important part of the work. We obtained equations for points of the spectrum and spectral graph. Points of the spectrum of the operator considered are in the* $O(h^2)$ *neighborhood of the spectral graph.*