

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ В ХРУПКИХ МАТЕРИАЛАХ

Осипов Р. А., Шевелев В. В.

Рассчитан и графически построен ряд функциональных зависимостей для плотности распределения вероятностей долговечности в хрупких материалах. Определены кинетические и статистические эффекты, обусловленные потерей репрезентативности распределения трещин в малых объемах.

Разрушение материалов, в том числе и полимеров, является случайным процессом. Это обусловлено в основном двумя факторами: 1) случайным характером распределения разрушающих материал трещин, и 2) случайным процессом их развития в материале.

В рамках структурно-статистической кинетической теории разрушения полимеров (Карташов и др., 2002) было получено следующее выражение для функции распределения значений долговечности:

$$\varphi(t) = \sum_{i=n_G}^{n_{k-1}} P(l_i, V) \varphi_i(l_i, t). \quad (1)$$

В данной формуле: n_G — номер трещины с Гриффитовым размером; n_{k-1} — номер трещины с предкритическим размером; $\varphi_i(l_i, t)$ — плотность распределения вероятностей значений долговечности, причем:

$$\varphi_i(l_i, t) = P_i(l_{k-1}, t) \omega_+(l_{k-1}), \quad (2)$$

$\omega_+(l)$ — частота разрыва связей в вершине трещины длины l , равная:

$$\omega_+(l) = \nu \exp\left\{-\left(U - V_a \chi \sigma \sqrt{l}\right) / (kT)\right\}, \quad (3)$$

ν — частота колебаний кинетических единиц, участвующих в элементарном акте разрыва связей, Гц; U — энергия активации элементарного акта разрыва связей при $\sigma = 0$, Дж; V_a — флуктуационный объем, м³; χ — параметр, учитывающий тип трещины; σ — растягивающее напряжение, Н/м²; k — постоянная Больцмана, $1.380662(44) \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T — абсо-

лютная температура, K ; $P_i(l_{k-1}, t)$ — вероятность того, что длина трещины начальной длины l_i в момент времени t будет равной $l_{k-1} = l_k - \lambda$, где l_k — критическая длина трещины, λ — межмолекулярное расстояние; $P(l_i, V)$ — вероятность того, что наибольшая трещина в материале имеет длину l_i . Эта вероятность равна следующему произведению:

$$P(l_i, V) = \left(1 - \exp(-\bar{N}(l_i, V))\right) \exp\left(-\sum_{k=i+1}^n \bar{N}(l_k, V)\right), \quad (4)$$

в котором $\bar{N}(l_i, V)$ — среднее число трещин длины l_i в материале объема V .

Функция $P_i(l_{k-1}, t)$ в случае, когда можно пренебречь частотами восстановления связей $\omega_-(l)$, находят из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} dP_i(l, t) / dt = \omega_+(l-1)P_i(l-1, t) - \omega_+(l)P_i(l, t), \\ l \in \{l_i+1, l_i+2, \dots, l_{k-1}\}, t > 0; \\ dP_i(l_i, t) / dt = -\omega_+(l_i)P_i(l_i, t), t > 0; \\ P_i(l_k, t) = 0, t \geq 0; \\ P_i(l, 0) = \delta_{ll_i} = \begin{cases} 1, & l = l_i; \\ 0, & l \neq l_i. \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Была найдена функция $P_i(l_{k-1}, t)$ на основе решения системы уравнений (5). Она имеет следующий вид:

$$P_i(l_{k-1}, t) = (-1)^{l_{k-1}-l_i} \prod_{j=0}^{l_{k-1}-l_i} E_j^{l_i, t} \prod_{m=0, m \neq j}^{l_{k-1}-l_i} (R_{j,m}^{l_i})^{-1}, \quad (6)$$

В данной формуле введены следующие обозначения:

$$R_{m,n}(l_i) = R_{m,n}^{l_i} = \omega_+(l_i+m) - \omega_+(l_i+n), \quad (7)$$

$$E_m(l_i, t) = E_m^{l_i, t} = \exp(-\omega_+(l_i+m)t), \quad (8)$$

$$\Pi_m(l_i) = \Pi_m^{l_i} = \prod_{n=0}^m \omega_+(l_i+n). \quad (9)$$

Было произведено построение функций $\varphi_{i,j}(l_i, t) = P_i(l_i+j, t)\omega_+(l_i+j)$, для которых справедливо равенство

$\varphi_{i,i_{k-1}-i}(l_i, t) = \varphi_i(l_i, t)$ (их часть изображена на рис. 1). При этом отмечен интересный эффект, заключающийся в том, что расстояние между функциями $\varphi_{i,j}(t)$, определенное в смысле следующего интеграла:

$$\rho(\varphi_{i,j}(t), \varphi_{i,q}(t)) = \int_0^{+\infty} |\varphi_{i,j}(t) - \varphi_{i,q}(t)| dt, \quad (10)$$

стремится к нулю при возрастании j и q (что непосредственно видно из рисунка). Было установлено, что для обезразмеренной задачи (5) ($\widetilde{\omega}_+(l) = \omega_+(l) / \omega_+(l_i)$, $\tilde{t} = \omega_+(l_i)t$) выполняется следствие:

$$s \geq (\delta^{-1} \ln \varepsilon - 2\sqrt{l_i}) \delta^{-1} \ln \varepsilon \Rightarrow \rho(\varphi_i(l_i, \tilde{t}), \varphi_{i,s}(l_i, \tilde{t})) < e^\delta (e^\delta - 1)^{-1} \varepsilon, \quad (11)$$

где $\delta = V_a \chi \sigma / (kT)$. Это позволяет заменять в формуле (2) $\varphi_i(t) = \varphi_{i,s}(t)$, что способно сократить объем расчетов почти на порядок, что является существенным, так как далее эти функции используются многократно при построении функции $\varphi(t)$ и последующей обработке экспериментальных данных.

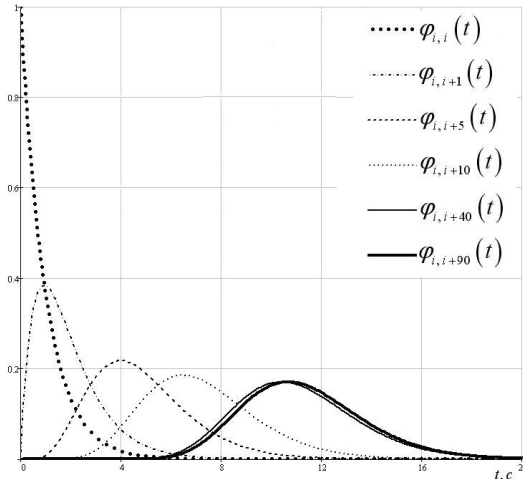


Рис. 1. Функции $\varphi_{i,j}(l_i, t)$ при фиксированном значении i и разных значениях $j = i + q$.

Данный эффект связан, по-видимому, с тем, что начиная с некоторого определенного номера s время развития трещины из состояния l_i до состояний l_{k-1} и $l_i + s$ крайне близки по своей величине.

Непосредственно из рисунка видно, что $\varphi_i(l_i, t)$ это кривая с максимумом, который примерно соответствует средней долговечности материала, содержащего только одну трещину длины l_i .

Гораздо сложнее построить функцию $P(l_i, V)$, так как величину $\bar{N}(l_i, V)$ трудно найти из-за сложности установления критериев, которые можно положить в основу ее определения.

Из экспериментальных данных (для полиметилметакрилата) известно, что:

1) $\zeta = \frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot 10^{-3}$ — отношение $\Delta V = V - V_0$ к V , в котором $m = V_0 \rho_0 = V \rho$, где m — масса образца, V_0 и ρ_0 — соответственно объем и плотность материала без трещин, V и ρ — объем и плотность реального материала;

2) $\bar{l} = 1700 \text{ \AA}$ — средняя длина трещины;

3) $\bar{h} = 800 \text{ \AA}$ — средняя ширина трещины,

4) $n_0 = 4 \cdot 10^{-18} \text{ м}^3$ — объем, приходящийся на одну трещину,

5) $\lambda = 42 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ — межмолекулярное расстояние.

Предположив, что нам известно распределение трещин в материале бесконечного объема $N(l, \infty)$, имеющее вид:

$$N(l, \infty) = A \exp(-l/\bar{l}), \quad (12)$$

функция количества трещин по длинам в объеме V_0 искалась в виде:

$$\bar{N}(l, V_0) = \varphi N_{\delta\delta}(V_0) N(l, \infty), \quad (13)$$

где A — безразмерная постоянная, \bar{l} — средняя длина трещины ($\bar{l} = n_s \lambda$).

Было получено, что $A = \exp(n_s^{-1}) - 1$, а сама функция $\bar{N}(l, V_0)$ имеет следующее выражение:

$$\bar{N}(l_k, V_0) = V_0 \Omega \exp(-k/n_s), \quad (14)$$

в котором $\mu = \left[\sqrt[3]{V_0} / \lambda \right]$, $\Omega = \bar{l}^{-1} \bar{h}^{-2} \zeta(1-\zeta)^{-1} \frac{\exp(1/n_s) - 1}{1 - \exp(-\mu/n_s)}$, $[x]$ — целая часть числа x .

Функции $\bar{N}(l_i, V_0)$ были построены для различных значений объема V_0 , их можно посмотреть на рис. 2.

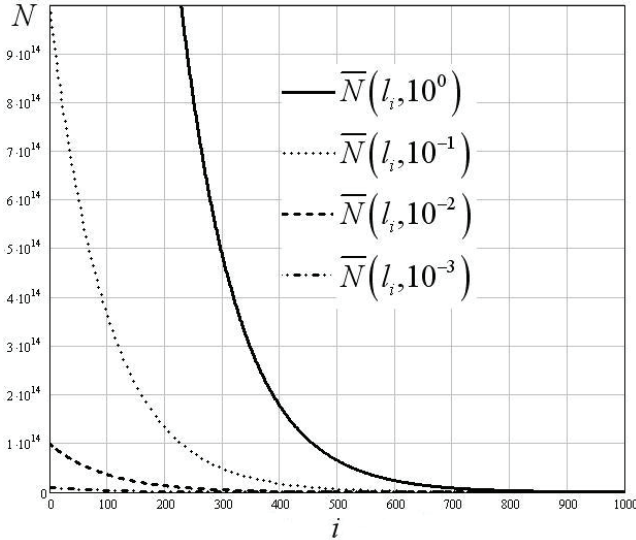


Рис. 2. Функция $\bar{N}(l_i, V_0)$ при различных значениях V_0 .

Функции $P(l_i, V_0)$ были построены для различных значений l_i , V_0 , σ (см. рис. 3).

Было замечено, что при уменьшении объема образца V_0 максимум функции $P(l_i, V_0)$ смещается в сторону меньших значений l_i , что свидетельствует о том, что количество трещин с большими длинами при уменьшении объема образца уменьшается. До значения порядка 10^{-6} м^3 наблюдается рост максимума функции, сопровождающийся медленным

смещением в сторону меньших длин l_i , при значениях порядка $V_0 < 10^{-6} \text{ м}^3$ рост максимума практически прекращается, одновременно с этим указанное его смещение сильно увеличивает свою скорость. Это связано с тем, что при столь малых объемах трещины больших размеров практически перестают встречаться в образце.

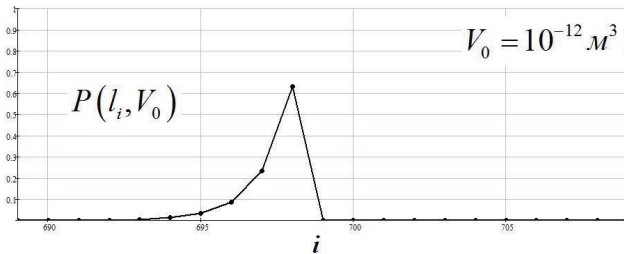


Рис. 3. График функции $P(l_i, V_0)$ при $V_0 = 10^{-12} \text{ м}^3$ при $i \in [689, 709]$.

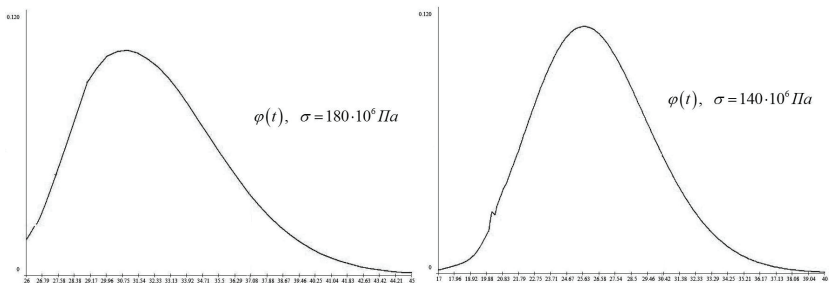


Рис. 4. График функции $\varphi(t)$ при различном значении растягивающего напряжения σ при постоянных \bar{l} и \bar{h} .

Функции $P(l_i, V_0)$ позволяют не только найти числовые характеристики долговечности, но и числовые характеристики, так называемого безопасного напряжения и тем самым осуществлять прогноз долговечности и прочности материалов, опираясь при этом на технологические данные по распределению дефектов, порождающих трещины в материале. Кроме того, из их рассмотрения следует увеличение средней долговечности материала при данном напряжении с уменьшением объема

материала, что связано с тем, что при этом уменьшается количество трещин с большими, близкими к l_k , размерами.

Графики функции $\varphi(t)$ были построены (см. рис. 4) в безразмерных координатах для различных значений σ , \bar{l} , \bar{h} трещины в материале, а также объема V_0 материала. Они соответствуют экспериментально наблюдаемым явлениям и подтверждают справедливость данной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Карташов Э. М., Цой Б., Шевелев В. В. Структурно-статистическая кинетика разрушения полимеров. — М.: Химия, 2002. — 736 с.

DISTRIBUTION OF DURABILITY VALUES FOR FRAGILE MATERIALS

Osipov R. A., Shevelev V. V.

A number of functional dependencies for density function of durability in fragile materials was calculated and plotted. Kinetic and statistical effects caused by loss of representativeness of splits distribution in small volumes were identified.