ВКБ-ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА [1]

Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В., Резаев Р. О.

Метод ВКБ-Маслова применен к нелинейному уравнению Фоккера-Планка. Рассмотрена общая конструкция построения явных аналитических решений задачи Коши в квазиклассическом ВКБ-приближении для многомерного уравнения Фоккера-Планка с квадратичной нелокальной нелинейностью и переменными коэффициентами в классе траекторно-сосредоточенных функций. Общие положения проиллюстрированы примером.

Введение. Влияние случайных воздействий на систему описывается в формализме Ито или Стратоновича стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), а также в формализме уравнения Фоккера-Планка (УФП). Как правило, СДУ исследуются методами компьютерного моделирования. Аналитические методы применяются к УФП, которое описывает эволюцию плотности распределения вероятностей расположения броуновских частиц. В терминах теории броуновского движения описывается ряд явлений в термодинамике, химии, эволюционной биологии, экономике, имеющих стохастическую природу.

Сложные нелинейные стохастические процессы при определенных ограничениях описываются уравнением Фоккера-Планка с различными типами нелинейности. Нелинейное уравнение Фоккера-Планка (НУФП) моделирует кооперативную динамику большого числа подсистем, взаимодействие которых описывается средним полем (Frank, 2005; Shiino, 1987; Shiino, 2002; Drozdov and Morillo, 1996), макроскопические необратимые эффекты, например, релаксацию термодинамических систем далеких от равновесия и макроскопическую самоорганизацию иерархических биологических систем. Совместное воздействие термального шума и среднего поля приводит в термодинамическом пределе к НУФП для

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке АВЦП ФАО Министерства Образования и Науки РФ № 2.1.1/3436; гранта Президента РФ № НШ-871.2008.2.

функции распределения, ассоциированной с параметром порядка (Desai and Zwanzig, 1978; Dawson, 1983).

Методы точного интегрирования многомерного нелинейного уравнения Фоккера-Планка с переменными коэффициентами неизвестны. Решения НУФП в аналитической форме могут быть построены лишь с помощью приближенных методов. В работах (Belov et al., 2002; В.В.Белов et al., 2002) развит метод построения квазиклассических асимптотик для уравнения Шредингера с кубичной нелокальной нелинейностью и переменными коэффициентами. Асимптотическим параметром для уравнений квантовой механике служит постоянная Планка $\hbar$. Метод основан на теории комплексного ростка В.П. Маслова (комплексного метода ВКБ-Маслова) (В.П.Маслов, 1977) (см. также (В.В.Белов and С.Ю.Доброхотов, 1988)). В квантовой механике квазиклассическое приближение опирается на принцип соответствия: в пределе $\hbar \to 0$ квантовая динамика переходит в соответствующую классическую механику. Форма квазиклассических решений определяется наличием малого параметра $\hbar$ при производных уравнения Шредингера.

В данной работе формализм квазиклассических асимптотик применен к решению задачи Коши для уравнения Фоккера-Планка с квадратичной нелокальной нелинейностью, для которого в качестве малого асимптотического параметра выбран коэффициент диффузии D, $D \to 0$. Роль классической механики выполняет полученная в работе динамическая система Эйнштейна-Эренфеста.

Нелинейное уравнение Фоккера-Планка. Нелинейное уравнение Фоккера-Планка с нелокальной нелинейностью запишем в виде

$$D\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} = \langle \hat{\vec{\pi}}, T\hat{\vec{\pi}}\rangle u(\vec{x},t) + \Big\langle \hat{\vec{\pi}}, \Big[V_{\vec{x}}(\vec{x},t)u(\vec{x},t) + \\ + \varkappa u(\vec{x},t)\int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\Big]\Big\rangle, \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $t\in\mathbb{R}^1$, $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)^\intercal\in\mathbb{R}^n$, $\vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)^\intercal\in\mathbb{R}^n$; $\langle .,.\rangle$ — скалярное произведение; $d\vec{x}=dx_1\ldots dx_n$; $u(\vec{x},t)$ — вещественная гладкая функция, убывающая при $|\vec{x}|\to\infty$; T — постоянная матрица диффузии.

$V(\vec{x},t), W(\vec{x},\vec{y},t)$ — потенциалы, определяющие коэффициент дрейфа, растут при $|\vec{x}|, |\vec{y}| \to \infty$ не быстрее, чем полином,

$$V_{\vec{x}}(\vec{x},t) = \frac{\partial V(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}}, \quad W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t) = \frac{\partial W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial \vec{x}}, \quad \hat{\vec{\pi}} = D\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \tag{2}$$

D — малый параметр.

Заметим, что для решений уравнения (1) сохраняется интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x},t)d\vec{x} = \text{const}$. Будем полагать, что решения нормированы, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x},t)d\vec{x} = 1$. В одномерном случае уравнение (1) принимает вид

$$-D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + D^2\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial}{\partial x}A(u,x,t)u(x,t) = 0,$$
$$A(u,x,t) = V_x(x,t) + \varkappa\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_x(x,y,t)u(y,t)dy. \tag{3}$$

Асимптотические решения уравнения (1) будем строить в классе $\mathcal{P}_t^D$ траекторно-сосредоточенных функций (ТСФ),

$$\mathcal{P}_t^D = \mathcal{P}_t^D\big(\vec{X}(t,D), S(t,D)\big) =$$
$$= \left\{\Phi : \Phi(\vec{x},t,D) = \varphi\Big(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}}, t, D\Big)\exp\Big[\frac{1}{D}S(t,D)\Big]\right\}. \tag{4}$$

Здесь вещественная функция $\varphi(\vec{\eta},t,D)$ принадлежит пространству Шварца $\mathbb{S}$ по $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$, гладко зависит от t и регулярна по $\sqrt{D}$ при $D \to 0$, $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t,D)$. Вещественные функции $S(t,D)$ и $\vec{X}(t,D)$ регулярно зависят от $\sqrt{D}$ в окрестности $D = 0$ и подлежат определению в процессе построения решения.

Функции класса $\mathcal{P}_t^D$ параметризованы траекторией $\vec{x} = \vec{X}(t,D) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$, и вещественнозначной функцией $S(t,D)$. В пределе при $D \to 0$ функции этого класса *сосредоточены в окрестности точки, движущейся вдоль кривой* $\vec{x} = \vec{X}(t,0)$.

Остановимся более подробно на свойствах класса $\mathcal{P}_t^D$.

Теорема 1 *На функциях класса $\mathcal{P}_t^D\big(\vec{X}(t,D), S(t,D)\big)$ справедливы асимптотические оценки*

$$\frac{\|\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(t,D)\Phi\|}{\|\Phi\|} = O(D^{(k+l)/2}), \quad \frac{\|\,[D\partial_t + \langle\dot{\vec{X}}(t), \hat{\vec{\pi}}\rangle - \dot{S}(t)]\Phi\|}{\|\Phi\|} = \\ = O(D), \tag{5}$$

где $\|\ldots\|$ — норма в пространстве L_2, а $\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(t,D)$ — оператор с вейлевским символом $\Delta_{\alpha,\beta}(\vec{\tau},\vec{x},t,D) = \vec{\pi}^{\alpha}(\Delta\vec{x})^{\beta}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ — мультииндексы.

С классом $\mathcal{P}_t^D$ связан класс $\big(\mathcal{P}_t^D\big)^*$ функций вида

$$\big(\mathcal{P}_t^D\big)^* = \Big\{\Omega : \Omega(\vec{x},t,D) = \psi\Big(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}}, t, D\Big)\exp\Big[-\frac{1}{D}S(t,D)\Big]\Big\},$$

где $\psi\big(\vec{\eta},t,D\big)$ — обобщенные функции медленного роста. Функции класса $\big(\mathcal{P}_t^D\big)^*$ сопряжены функциям класса $\mathcal{P}_t^D$.

Утверждение 1 *Для функций $\Phi \in \mathcal{P}_t^D$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{D\to 0}\Phi(\vec{x},t) = \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)). \tag{6}$$

Частный случай класса $\mathcal{P}_t^D$ — класс функций $\mathcal{J}_t^D$:

$$\mathcal{J}_t^D = \mathcal{J}_t^D\big(\vec{X}(t,D), S(t,D)\big) = \\ = \Big\{\Phi : \Phi(\vec{x},t,D) = \varphi\Big(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}}, t\Big)\exp\Big[\frac{1}{D}S(t,D)\Big]\Big\}, \tag{7}$$

функции $\varphi(\vec{\xi},t)$ не зависят от D явно.

Функции класса $\big(\mathcal{P}_t^D\big)$ локализованы в окрестности точки (нульмерного многообразия), движущейся вдоль фазовой кривой $\vec{x} = \vec{X}(t,D) \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1 *Квазиклассические асимптотические решения УФП, построенные в классе $\big(\mathcal{P}_t^D\big)$ с точностью $O(D^k)$ будем называть квазиклассически сосредоточенными решениями типа $(k,0)$.*

Система Эйнштейна-Эренфеста типа $(k, 0)$**.** Алгоритм построения квазиклассических решений НУФП включает в себя динамическую систему уравнений для центрированных моментов функции распределения. Для простоты и наглядности рассмотрим $(1 + 1)$ – мерное НУФП. Средние и центрированные моменты определим стандартным образом

$$x_u(t) = \langle x \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x u(x, t) dx, \tag{8}$$

$$\alpha_u^{(n)}(t) = \langle (\Delta x)^n \rangle (t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [x - x_u(t)]^n u(x, t) dx \tag{9}$$

и обозначим

$$\alpha_u(t; M) = (\alpha_u^{(2)}(t), \alpha_u^{(3)}(t), \ \ldots \ , \alpha_u^{(M)}(t)),$$

где M — число учитываемых моментов. Динамическая система моментов порядка M следует непосредственно из НУФП:

$$\dot{x}_u(t) = -f(x_u(t), \alpha_u(t; M), t) + O(D^{(M+1)/2}), \tag{10}$$

$$\dot{\alpha_u}^{(n)}(t) = -\Phi(x_u(t), \alpha_u(t; M), t) + O(D^{(M+1)/2}), \quad n = \overline{2, M},$$

$$f = \sum_{k=0}^{M} \left\{ \frac{1}{k!} \Big[\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k} - D \frac{\partial^k B_x(t)}{\partial x^k} \Big] \alpha^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \varkappa \sum_{l=0}^{M} \frac{1}{k! l!} \frac{\partial^{k+l} W_x(t)}{\partial x^k \partial y^l} \alpha^{(k)} \alpha^{(l)} \right\}, \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(n)} = n \sum_{k=0}^{M-n+1} & \left\{ \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k} - D\frac{\partial^k B_x(t)}{\partial x^k}\right]\alpha^{(k+n-1)} + \right.\\
& \left. + \varkappa \sum_{l=0}^{M} \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l} W_x(t)}{\partial x^k \partial y^l}\alpha^{(k+n-1)}\alpha^{(l)} \right\} + \\
& + Dn(n-1)\sum_{k=0}^{M-n+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k B(t)}{\partial x^k}\alpha^{(k+n-2)} + \\
& + n\alpha^{(n-1)}\sum_{k=0}^{M}\left\{\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k V_x(t)}{\partial x^k} - D\frac{\partial^k B_x(t)}{\partial x^k}\right]\alpha^{(k)} + \right.\\
& \left. + \varkappa \sum_{l=0}^{M} \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l} W_x(t)}{\partial x^k \partial y^l}\alpha^{(k)}\alpha^{(l)} \right\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Систему

$$\dot{x}(t) = -f(x(t), \alpha_u(t; M), t), \tag{13}$$

$$\dot{\alpha}^{(n)}(t) = -\Phi^{(n)}(x(t), \alpha_u(t; M), t), \quad n = \overline{2, M} \tag{14}$$

будем называть *системой Эйнштейна–Эренфеста (СЭЭ)* порядка M для нелинейного уравнения Фоккера–Планка. Общее решение этой системы обозначим

$$\mathfrak{g}^{(M)}(t, \boldsymbol{C}) = \big(x^{(M)}(t, \boldsymbol{C}), \alpha^{(1,M)}(t, \boldsymbol{C}), \alpha^{(2,M)}(t, \boldsymbol{C}), \ldots, \alpha^{(M,M)}(t, \boldsymbol{C}), \boldsymbol{C}\big), \tag{15}$$

$\boldsymbol{C}$ — набор констант интегрирования. Решение системы (13), (14) Эйнштейна–Эренфеста порядка M с начальными условиями

$$x_\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx, \quad \alpha_\varphi^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_\varphi)^k dx, \quad k = \overline{2, M}$$

обозначим

$$\mathfrak{g}_\varphi^{(M)}(t) = \big(x_\varphi^{(M)}(t), \alpha_\varphi^{(1,M)}(t), \alpha_\varphi^{(2,M)}(t), \ldots, \alpha_\varphi^{(M,M)}(t)\big). \tag{16}$$

Непосредственно проверяется

Утверждение 2 *Решения* $x_\varphi^{(M)}(t)$ *и* $\alpha_\varphi^{(k,M)}(t)$, $k = \overline{1,M}$, *системы Эйнштейна–Эренфеста порядка* M *и средние* (8), (9), *вычисленные по функции* $u(x,t)$, *связаны соотношением*

$$\begin{aligned} x_u(t) &= x_\varphi^{(M)}(t) + O(D^{(M+1)/2}),\\ \alpha_u^{(k)}(t) &= \alpha_\varphi^{(k,M)}(t) + O(D^{(M+1)/2}), \quad k = \overline{2,M}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $u = u(x,t)$ *— траекторно сосредоточенное решение уравнения Фоккера–Планка с начальным условием* $u(x,0) = \varphi(x) \in P_0^D$.

Линейное ассоциированное уравнение Фоккера-Планка. Для построения квазиклассического решения НУФП (1) в классе функций $\mathcal{P}_t^D(x_u(t,D), S(t,D))$ вида (4) разложим функцию $W_x(x,y,t)$ (2) в степенной ряд по $\Delta y = y - x_u(t)$ и приведем НУФП к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= D\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\Bigg(V_x(x,t) + \\ &+ \varkappa\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l W_x(x,y,t)}{\partial y^l}\bigg|_{y=x_u(t)}\alpha_u^{(l)}(t)\Bigg)u(x,t)\Bigg] + O(D^{(M+1)/2}). \end{aligned} \tag{18}$$

Введем вспомогательное уравнение, которое получается из (18) в результате формальной замены средних (8), (9) общим решением системы Эйнштейна–Эренфеста порядка M, (15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t,\boldsymbol{C})}{\partial t} &= D\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)\frac{\partial v(x,t,\boldsymbol{C})}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}\big[\Lambda^{(M)}(x,t,\mathfrak{g}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))v(x,t,\boldsymbol{C})\big], \\ \Lambda^{(M)}(x,t,\mathfrak{g}^{(M)}(t,\boldsymbol{C})) &= V_x(x,t) + \\ &+ \varkappa\sum_{l=0}^{M}\frac{1}{l!}\frac{\partial^l W_x(x,x^{(M)}(t),t)}{\partial y^l}\alpha^{(l,M)}(t,\boldsymbol{C}). \end{aligned} \tag{19}$$

Уравнение (19) будем называть *линейным ассоциированным уравнением Фоккера–Планка (ЛАУФП) порядка* M.

С учетом оценок (5) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 *Если траекторно-сосредоточенные решения уравнения* (18) *и уравнения* (19) *удовлетворяют одному и тому же начальному условию*

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in \mathcal{P}_0^D, \tag{20}$$

то решения уравнений (18) *и* (19) *связаны следующим соотношением:*

$$u(x,t) = v^{(M)}(x,t,\boldsymbol{C}_\varphi) + O(D^{(M+1)/2}), \tag{21}$$

где постоянные $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_\varphi$ *определяются из условия*

$$\mathfrak{g}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}) = \mathfrak{g}_\varphi^{(M)}(t). \tag{22}$$

Теорема 2 заключает в себе алгоритм построения квазиклассических решений НУФП.

Пример: точные решения типа $(k,0)$**.** Частное решение линейного ассоциированного уравнения (19)

$$\hat{L}_0 v(x,t,\boldsymbol{C}) = 0$$

будем искать в форме

$$v_0^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}) = N_v \exp\left\{\frac{1}{D}\left[S(t,D) + \frac{1}{2}Q(t)\Delta x^2\right]\right\}, \ \Delta x = x - x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}), \tag{23}$$

где N_D — нормировочная постоянная.Подставим (23) в (19) и, приравняв члены с одинаковыми степенями по Δx, получим систему уравнений:

$$\dot{S} - D\Lambda_x^{(M)}(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),t) - DB(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))Q = 0, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\dot{Q} - \Lambda_x^{(M)}(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),t)Q - B(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))Q^2 = 0. \tag{25}$$

Построим операторы симметрии ЛАУФП (19) в виде

$$\hat{a}(t,\boldsymbol{C}) = N_a[Z(t)D\partial_x - W(t)\Delta x], \tag{26}$$

где N_a — константа. Функции $Z(t)$ и $W(t)$ определим из условия

$$[\hat{L}_0(\mathfrak{g}^{(M)}(t,\boldsymbol{C})), \hat{a}(t,\boldsymbol{C})] = 0. \tag{27}$$

Условие (27) выполнено, если функции $Z(t)$ и $W(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{W} = \Lambda_x^{(M)}(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),t)W, \\ \dot{Z} = -2B(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),t)W - \Lambda_x^{(M)}(x^{(M)}(t,\boldsymbol{C}),t)Z. \end{cases} \tag{28}$$

Будем называть систему уравнений (28) *системой в вариациях* для уравнения (19).

Справедливы следующие соотношения:

$$Q(t) = \frac{W(t)}{Z(t)}, \qquad \exp\Big[\frac{1}{D}S(t,D)\Big] = \sqrt{\frac{Z(0)W(t)}{Z(t)W(0)}}, \tag{29}$$

которые приводят к

$$v_0^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}) = N_v\sqrt{\frac{Z(0)W(t)}{Z(t)W(0)}}\exp\Big[\frac{1}{2D}\frac{W(t)}{Z(t)}\Delta x^2\Big]. \tag{30}$$

Рассмотрим решения системы в вариациях, удовлетворяющие условиям

$$W^{(+)}(0) = b, \quad W^{(-)}(0) = -b, \quad b > 0, \quad Z^{(\pm)}(0) = 1. \tag{31}$$

На решениях системы в вариациях сохраняется кососкалярное произведение:

$$W^{(+)}(t)Z^{(-)}(t) - Z^{(+)}(t)W^{(-)}(t) = 2b. \tag{32}$$

Соответствующее выражение для функции (30) имеет вид

$$v_0^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}) = N_v\sqrt{-\frac{W^{(-)}(t)}{bZ^{(-)}(t)}}\exp\Big[\frac{1}{2D}\frac{W^{(-)}(t)}{Z^{(-)}(t)}\Delta x^2\Big]. \tag{33}$$

Также будем считать, что $W^{(-)}(t)Z^{(-)}(t) < 0$.

Операторы $\hat{a}^{(\pm)}(t, \boldsymbol{C})$ нормируются условием

$$[\hat{a}^{(-)}, \hat{a}^{(+)}] = 1. \tag{34}$$

Тогда

$$\hat{a}^{(+)}(t, \boldsymbol{C}) = \frac{1}{\sqrt{2bD}}[Z^{(+)}(t)D\partial_x - W^{(+)}(t)\Delta x]; \tag{35}$$

$$\hat{a}^{(-)}(t, \boldsymbol{C}) = -\frac{1}{\sqrt{2bD}}[Z^{(-)}(t)D\partial_x - W^{(-)}(t)\Delta x]. \tag{36}$$

Функция (33) является вакуумным состоянием для оператора $\hat{a}^{(-)}(t, \boldsymbol{C})$:

$$\hat{a}^{(-)}(t, \boldsymbol{C})v_0^{(0)}(x, t, \boldsymbol{C}) = 0. \tag{37}$$

Нормировочный множитель N_v равен

$$N_v = \sqrt{\frac{b}{2\pi D}}.$$

Определим систему функций как результат последовательного действия операторов «рождения» на вакуумное состояние:

$$v_n^{(0)}(x, t, \boldsymbol{C}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^{(+)}(t, \boldsymbol{C}))^n v_0^{(0)}(x, t, \boldsymbol{C}), \tag{38}$$

где $\boldsymbol{C}_n$ определяются соотношением (22) при $\varphi = v_n^{(0)}(x, 0)$. С помощью формулы Родрига для полиномов Эрмита,

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}(e^{-\xi^2})^{(n)},$$

запишем

$$v_n^{(0)}(x, t, \boldsymbol{C}_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}}\Big[\frac{Z^{(+)}(t)}{Z^{(-)}(t)}\Big]^{n/2} H_n\Big(\sqrt{\frac{b}{DZ^{(-)}(t)Z^{(+)}(t)}}\Delta x\Big)v_0^{(0)}. \tag{39}$$

Из определения оператора $\hat{a}^{(+)}(t, \boldsymbol{C})$ и функции $v_0^{(0)}(x, t, \boldsymbol{C})$, следует, что функции (39) будут решением ЛАУФП для произвольного натурального n.

Рассмотрим вспомогательную систему функций

$$w_n^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}}\Big[\frac{Z^{(-)}(t)}{Z^{(+)}(t)}\Big]^{n/2} H_n\Big(\sqrt{\frac{b}{DZ^{(-)}(t)Z^{(+)}(t)}}\Delta x\Big)\times$$
$$\times w_0^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}). \qquad (40)$$

Функция

$$w_0^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}) = \sqrt{\frac{b}{Z^{(+)}(t)W^{(+)}(t)}}\exp\Big[-\frac{1}{2D}\frac{W^{(+)}(t)}{Z^{(+)}(t)}\Delta x^2\Big] \qquad (41)$$

является решением обратного (сопряженного) ЛАУФП.

Справедлива

Теорема 3 1. *Функции* $u_n(x,t) = v_n^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_n)$ *являются асимптотическими решениями НУФП с точностью* $O(D^{3/2})$*, если они удовлетворяют начальному условию*

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x) = v_n(x,0,\boldsymbol{C}_n), \qquad (42)$$

где $\boldsymbol{C}_n$ *являются решениями уравнения* $\mathfrak{g}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}_n) = \mathfrak{g}_\varphi^{(M)}(t)$.

2. *Система функций* $\{v_n^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_n)\}_{n=0}^\infty$ (39), $\{w_m^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_m)\}_{m=0}^\infty$ (40) *биортогональна,*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_n^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_n)w_m^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_m)dx = \delta_{nm}, \qquad (43)$$

и удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n^{(0)}(x,t,\boldsymbol{C}_n)w_n^{(0)}(y,t,\boldsymbol{C}_n) = \delta(x-y). \qquad (44)$$

Функция

$$u(x,t) = \hat U(t,\varphi)(t) = \hat U(t,\mathfrak{g}^{(M)}(t,\boldsymbol{C}))\varphi(x) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{(0)}(x, y, t, \mathfrak{g}^{(M)}(t, \boldsymbol{C}))\Big|_{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{\varphi}} \varphi(y)dy, \tag{45}$$

где $\varphi(x) \in P_0^D$, является асимптотическим решением НУФП (1) порядка $O(D^{3/2})$ с начальным условием

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{46}$$

а оператор $\hat{U}(t, \mathfrak{g}^{(M)}(t, \boldsymbol{C}))$ является приближенным (с точностью $O(D^{3/2})$) оператором эволюции для ЛАУФ (19), а оператор $\hat{U}(t, \dot{})(x)$ определяемый соотношением (45) является приближенным, с точностью до $O(\hbar^{3/2})$ решением НУФП (1).

Ядро $G^{(0)}$ оператора эволюции $\hat{U}$ имеет вид

$$\begin{gathered} G^{(0)}(x, y, t, s, \mathfrak{g}^{(M)}(t, \boldsymbol{C})) = \sqrt{\frac{M_1(t, s)}{2\pi D M_2(t, s)}} \times \\ \times \exp\Big[-\frac{M_1(t, s)}{2DM_2(t, s)}(\Delta x^2 - M_3(t, s)\Delta y^2)\Big], \\ W^{\pm}(t, s) = M_1(t, s)W^{\pm}(s), \\ Z^{\pm}(t, s) = -M_2(t, s)W^{\pm}(s) + M_3(t, s)Z(s), \\ M_1(t, s)\Big|_{t=s} = 1, \quad M_2(t, s)\Big|_{t=s} = 0, \quad M_3(t, s)\Big|_{t=s} = 1, \end{gathered} \tag{47}$$

где s — начальный момент времени.

Заключение. Суммируем основные результаты работы. Для $(1 + 1)$ – и $(1 + n)$ – мерного НУФП в классе функций $\mathcal{P}_t^D$:

- Сформулирован общий метод построения квазиклассических асимптотик для НУФП в классе функций $\mathcal{P}_t^D$.
- В явном виде построен счетный набор квазиклассических асимптотик, являющийся базисом в пространстве начальных состояний для НУФП.
- Построены квазиклассические операторы симметрии НУФП с точностью $O(D^{3/2})$.

- Найден явный вид нелинейного оператора эволюции $\hat{U}$ в квазиклассическом приближении с точностью $O(D^{3/2})$).
- Для НУФП с оператором квадратичным по координатам и производным показано, что асимптотические решения являются точными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В.В.Белов, А.Ю.Трифонов, А.В.Шаповалов. Квазиклассическое траекторно-когерентное приближение для уравнения типа Хартри // *Теор. мат. физ.* — 2002. — Vol. 130. — Pp. 460–492.

В.В.Белов, С.Ю.Доброхотов. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. Общий подход // *Теор. мат. физика.* — 1988. — Vol. 92. — Pp. 215–254.

В.П.Маслов. Комплекный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.

Belov V., Trifonov A., Shapovalov A. The trajectory-coherent approximation and the system of moments for the hartree type equation // *Int. J.Math. and Math. Sci.* — 2002. — Vol. 32. — Pp. 325–370.

Dawson D. A. Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior // *J. Stat. Phys.* — 1983. — Vol. 31. — Pp. 29–85.

Desai R. C., Zwanzig R. Statistical mechanics of a nonlinear stochastic model // *J. Stat. Phys.* — 1978. — Vol. 19. — Pp. 1–24.

Drozdov A. N., Morillo M. Solution of nonlinear Fokker-Planck equations // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Vol. 54. — Pp. 931–937.

Frank D. Nonlinear Fokker-Plank equations.Fundamentals and applications. — N.Y., London: Springer-Verlag, 2005.

Shiino M. Dynamical behavior of stochastic systems of infinitely many coupled nonlinear oscillators exhibiting phase transitions of mean-field type: H theorem on asymptotic approach to equilibrium and critical slowing down of order-paramter fluctuations // *Phys. Rev. E.* — 1987. — Vol. 36. — Pp. 2393–2412.

Shiino M. Nonlinear Fokker–Planck equation exhibiting bifurcation phenomena and generalized thermostatistics // *J. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 43. — Pp. 2654–2669.

WKB-APPROXIMATION FOR THE NONLINEAR FOKKER-PLANCK EQUATION

Trifonov A. Yu., Shapovalov A. V., Rezaev R. O.

The WKB-Maslov method is applied to the nonlinear Fokker-Planck equation. General construction of explicit analytical solutions in semiclassical WKB-approximation of the Cauchy problem is considered for the multidimensional Fokker-Planck equation with quadratic nonlocal nonlinearity and variable coefficients. Semiclassical solutions are found in the class of trajectory concentrated functions. General formulae are illustrated by example.