ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ ОДНОСЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ РЕГИОНА

Тихонов М. С.

Рассматривается односекторная динамическая модель развития региона, учитывающая конкуренцию среди занятых в экономике за ограниченный ресурс рабочих мест. Проведено эконометрическое моделирование численных значений параметров модели на основе статистических данных по Рязанской области, качественное исследование поведения решений модели. Результаты исследования использованы для построения прогноза доходной части областного бюджета.

Введение. Над математическим моделированием экономических процессов работали такие выдающиеся ученые, как В. Леонтьев (модель межотраслевого баланса), Р. Солоу (макромодель экономики), Р. Стоун (модель потребительского выбора) и многие другие.

Модель, представленная в настоящей работе, является модификацией динамических моделей Кейнса и Харрода-Домара (Колемаев, 2005; Кундышева, 2004). Основные отличия построенной модели от указанных состоят в следующем:

1) уравнение динамики числа занятых в экономике составлено с учетом конкуренции на рынке труда,

2) объем конечного потребления линейно зависит от численности населения (то есть темп роста конечного потребления является переменной величиной),

3) доходная часть регионального бюджета находится в зависимости от ВРП.

Целями настоящей работы являются:

1) построение и исследование односекторной динамической модели развития региона (Рязанской области), учитывающей конкуренцию среди занятых в экономике за ограниченный ресурс рабочих мест;

2) прогнозирование изменения следующих экономических показателей: численности населения, занятого в экономике, стоимости основных фондов экономики, валового регионального продукта Рязанской

области и доходной части бюджета Рязанской области, — с помощью построенной модели.

Модель. Будем предполагать, что:

1) валовой региональный продукт (ВРП) X распределяется между инвестициями I и общим потреблением S в соответствии с балансовым уравнением

$$X = I + S, \tag{1}$$

2) скорость изменения валового регионального продукта $\dot{X} = \dfrac{dX}{dt}$ пропорциональна инвестициям:

$$\dot{X} = mI, \tag{2}$$

где $m \in [0;1]$ — норма инвестиций, t — время. Объем производства ВРП X определяется производственной функцией $X = F(K,L)$, где K — стоимость основных фондов экономики, L — численность населения, занятого в экономике;

3) инвестиции расходуются на увеличение основных производственных фондов K, выбытие их отсутствует, инвестиционный лаг равен нулю:

$$\dot{K} = I. \tag{3}$$

Пусть общее потребление S делится на производственное потребление $aF(K,L)$ и конечное потребление $S_1 = bN + c$, где $a \in [0;1)$ — склонность к потреблению, N — численность населения, проживающего в регионе, b — среднедушевое потребление, то есть

$$S = aF(K,L) + bN + c. \tag{4}$$

Подставляя (1) и (4) в (2), а (2) в (3), получим уравнение динамики основных производственных фондов:

$$\dot{K} = (1-a)F(K,L) - bN - c. \tag{5}$$

Будем полагать, что численность населения, занятого в экономике L, пропорциональна численности населения, проживающего на данной территории, N:

$$L = \mu N + \alpha. \tag{6}$$

Динамика численности населения, проживающего на данной территории, описывается уравнением П.Ф. Ферхюльста (Базыкин, 2003):

$$\dot{N} = rN\left(\frac{M-N}{M}\right), \tag{7}$$

где M — максимально допустимая численность населения на данной территории, r — коэффициент прироста (убыли) населения. Подставив (6) в (7), получим уравнение динамики числа занятых в экономике, учитывающее конкуренцию за ограниченный ресурс рабочих мест:

$$\dot{L} = rL - \frac{rL^2}{M\mu} - r\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{M\mu}\right) + \frac{2rL\alpha}{M\mu}. \tag{8}$$

В качестве производственной функции будем использовать мультипликативную функцию вида $F(K, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$. Подставим (6) в (5), тогда дифференциальные уравнения (5) и (8) описывают динамическую модель экономического развития региона:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1-a)a_0 K^{a_1} L^{a_2} - \left(\dfrac{bL}{\mu} - \dfrac{b\alpha}{\mu} + c\right), \\ \dot{L} = -\dfrac{rL^2}{M\mu} + L\left(r + \dfrac{2r\alpha}{M\mu}\right) - r\alpha\left(1 + \dfrac{\alpha}{M\mu}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Решения системы (9) $K(t)$ и $L(t)$ позволяют строить прогноз динамики стоимости основных фондов экономики и численности населения, занятого в экономике, а также — прогноз динамики валового регионального продукта $X(t) = a_0 (K(t))^{a_1} (L(t))^{a_2}$ при условии постоянства параметров a, a_0, a_1, a_2, b, μ, c, M, r, α.

Предположим, что доходная часть регионального бюджета находится в зависимости от валового регионального продукта, тогда окончательно система (9) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{K} = (1-a)a_0 K^{a_1} L^{a_2} - \left(\dfrac{bL}{\mu} - \dfrac{b\alpha}{\mu} + c\right), \\ \dot{L} = -\dfrac{rL^2}{M\mu} + L\left(r + \dfrac{2r\alpha}{M\mu}\right) - r\alpha\left(1 + \dfrac{\alpha}{M\mu}\right), \\ H = f(X), \end{cases} \tag{10}$$

где H — доходная часть регионального бюджета.

Результаты. Методами регрессионного анализа (Елисеева, 2007) на основе статистических данных (Рязанской…, 2007; Социальное…, 2002 a; Социальное…, 2007 b) и опубликованных отчетов (www.irex.ru; www.budgetrf.ru) были получены регрессионные уравнения для зависимостей $S_1 = bN + c$, (6), производственной функции $X = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ и решения уравнения (7).

Зависимость конечного потребления от численности населения $S_1 = bN + c$ для Рязанской области имеет вид $S_1 = -22{,}25N + 29587{,}7$. Коэффициент корреляции $r_{S_1} = -0{,}99$, средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}_{S_1} = 5{,}51\%$, уравнение регрессии статистически значимо на уровне $\alpha = 0{,}05$.

Зависимость числа занятых в экономике от численности населения $L = \mu N + \alpha$ вида (6) для Рязанской области имеет вид $L = 0{,}23N + 255{,}84$. Коэффициент корреляции $r_L = 0{,}79$, средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}_L = 0{,}92\%$, уравнение статистически значимо на уровне $\alpha = 0{,}05$.

Производственная функция Рязанской области за 1999–2007 гг. имеет вид $X = 0{,}02 \cdot K^{1{,}34} \cdot L^{-0{,}25}$. Индекс корреляции $R_X = 0{,}99$, средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}_X = 3{,}6\%$, уравнение регрессии значимо на уровне $\alpha = 0{,}05$.

Зависимость численности населения от времени, являющаяся решением уравнения (7), имеет вид $N = \dfrac{96401{,}8}{1 + \left(\dfrac{96401{,}8}{N_0} - 1\right) e^{0{,}014(t - t_0)}}$ (Тихонов, 2007), индекс корреляции $r_N = 0{,}99$, средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}_N = 0{,}43\%$, уравнение регрессии значимо на уровне $\alpha = 0{,}05$.

Значение $a = 0{,}75$ выбрано по экспертным оценкам, предложенным в (www.irex.ru; www.budgetrf.ru).

Зависимость доходной части регионального бюджета для Рязанской области имеет вид $H = -1544495 + 136 \cdot X$. Коэффициент корреляции $r_X = 0{,}79$, средняя ошибка аппроксимации $\overline{A}_X = 0{,}92\%$, уравнение статистически значимо на уровне $\alpha = 0{,}05$.

Таким образом, получены следующие значения параметров динамической модели экономического развития региона (Рязанской области):

$$\begin{aligned}&a=0,75,\ a_0=0,02,\ a_1=1,34,\ a_2=-0,25,\ b=-22,25,\ \mu=0,23,\\&c=29587,7,\ M=96401,8,\ r=-0,014,\ \alpha=255,84,\end{aligned}\tag{11}$$

с учетом которых система (10) примет вид:

$$\begin{cases}\dot K=0,25\cdot 0,02K^{1,34}L^{-0,25}-\left(\dfrac{-22,25L}{0,23}+54823,74\right),\\ \dot L=-\dfrac{-0,014L^2}{21749,61}-0,014L+3,59,\\ H=-1544495+136\cdot X.\end{cases}\tag{12}$$

Всюду далее будем использовать термин «система (10), (12)», на том основании, что обе указанные системы описывают один и тот же процесс.

Исследуем поведение фазовых траекторий системы (10), (12) методами качественной теории дифференциальных уравнений (Баутин, 1976).

Состояния равновесия динамической системы (10), (12) являются решениями алгебраической системы уравнений вида:

$$\begin{cases}(1-a)a_0K^{a_1}L^{a_2}-\left(\dfrac{bL}{\mu}-\dfrac{b\alpha}{\mu}+c\right)=0,\\ -\dfrac{rL^2}{M\mu}+L\left(r+\dfrac{2r\alpha}{M\mu}\right)-r\alpha\left(1+\dfrac{\alpha}{M\mu}\right)=0.\end{cases}\tag{13}$$

Второе уравнение системы (13) имеет два корня $L_{0_1}=\alpha$ и $L_{0_2}=M\mu+\alpha$. Подставляя полученные значения L_{0_1} и L_{0_2} в первое уравнение системы (13) получим: $K_{0_1}=\sqrt[a_1]{\dfrac{c}{(1-a)a_0\alpha^{a_2}}}$ и $K_{0_2}=\sqrt[a_1]{\dfrac{bM+c}{(1-a)a_0(M\mu+\alpha)^{a_2}}}$. Так как согласно (11), $b<0$, то значение K_{0_2} не существует. Тогда, система (10), (12) имеет одно состояние равновесия $Z(K_{0_1},L_{0_1})=Z(K_0,L_0)=\left(\sqrt[a_1]{\dfrac{c}{(1-a)a_0\alpha^{a_2}}};\alpha\right)=(315803,6;\ 255,84)$.

Для определения типа состояния равновесия динамической системы (10), (12) выполним замену переменных $x = K - K_0$ и $y = L - L_0$, где $K_0 = \sqrt[a_1]{\dfrac{c}{(1-a)a_0\alpha^{a_2}}}$, $L_0 = \alpha$, с учетом которой получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-a)a_0(x+K_0)^{a_1}(y+L_0)^{a_2} - \left(\dfrac{by}{\mu} + c\right), \\ \dot{y} = -\dfrac{r}{M\mu}y^2 + ry. \end{cases} \tag{14}$$

В правой части первого уравнения системы (14) выделим линейную по x и y часть. Выражения $(x+K_0)^{a_1}$ и $(y+L_0)^{a_2}$ разложим в ряд Тейлора по степеням x и y (Кудрявцев, 1988):

$$(x+K_0)^{a_1} = K_0^{a_1}\left(1 + \frac{a_1}{K_0}x + \frac{a_1(a_1-1)}{2!K_0^2}x^2 + \frac{a_1(a_1-1)(a_1-2)}{3!K_0^3}x^3 + \ldots\right),$$

$$(y+L_0)^{a_2} = L_0^{a_2}\left(1 + \frac{a_2}{L_0}y + \frac{a_2(a_2-1)}{2!L_0^2}y^2 + \frac{a_2(a_2-1)(a_2-2)}{3!L_0^3}y^3 + \ldots\right),$$

подставим их в первое уравнение системы (14), приведем подобные слагаемые, обозначим $\sigma = (x, y)$, тогда система (14) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1\sqrt[a_1]{(1-a)a_0\alpha^{a_2}c^{a_1-1}}\,x + \left(\dfrac{a_2 c}{\alpha} - \dfrac{b}{\mu}\right)y + \\ \qquad + (1-a)a_0K_0^{a_1}L_0^{a_2}\left(\dfrac{a_1a_2}{K_0L_0}xy + \dfrac{a_1(a_1-1)}{2K_0^2}x^2 + \dfrac{a_2(a_2-1)}{2L_0^2}y^2 + o(\sigma^2)\right), \\ \dot{y} = ry - \dfrac{r}{M\mu}y^2. \end{cases} \tag{15}$$

Матрица линейного приближения системы (15) имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_1\sqrt[a_1]{(1-a)a_0\alpha^{a_2}c^{a_1-1}} & \dfrac{a_2c}{\alpha} - \dfrac{b}{\mu} \\ 0 & r \end{pmatrix}$, ее собственные значения равны соответственно $\lambda_1 = a_1\sqrt[a_1]{(1-a)a_0\alpha^{a_2}c^{a_1-1}}$ и $\lambda_2 = r$. Подставляя значения параметров (11) в выражения для λ_1 и λ_2, получим $\lambda_1 = 0{,}13$,

$\lambda_2 = -0{,}014$. Так как λ_1 и λ_2 действительные числа разных знаков, то состояние равновесия (K_0, L_0) является седлом (Баутин, 1976).

Сепаратрисы динамической системы (10), (12) определяются уравнениями вида: $L = \alpha$, $L = \alpha + \mu M$, $K = \sqrt[a_1]{\dfrac{b(L-\alpha)+c\mu}{\mu(1-a)a_0 L^{a_2}}}$. Подставляя значения параметров (11), в уравнения для сепаратрис, получим $L = 255{,}84$, $L = 22005{,}45$, $K = \sqrt[1{,}34]{\dfrac{-22{,}25L + 12369{,}01}{0{,}001L^{-0{,}25}}}$ (пунктирные линии со стрелками на рис. 1).

Поведение траекторий динамической системы (10), (12) представлено на рис. 1 (сплошные линии, стрелками показано направление развития).

Точка $Z(K(t_0), L(t_0))$, описывающая экономическое положение региона в момент времени t_0, может попасть в любую из областей I–V (рис. 1). В области I будет наблюдаться постепенное уменьшение стоимости основных производственных фондов при увеличении численности населения, занятого в экономике. В области II стоимость основных производственных фондов растет до некоторой величины, а затем снижается при уменьшении численности населения, занятого в экономике. В области III численность населения, занятого в экономике, будет снижаться, а стоимость основных производственных фондов расти. В области IV стоимость основных производственных фондов уменьшается до некоторой величины, а затем увеличивается при увеличении численности населения, занятого в экономике. В области V стоимость основных производственных фондов будет расти при снижении численности населения, занятого в экономике.

Области I и II характеризуют экономический кризис, IV область — экономический рост, а области III и V — рост стоимости основных фондов экономики при снижении численности населения, занятого в экономике.

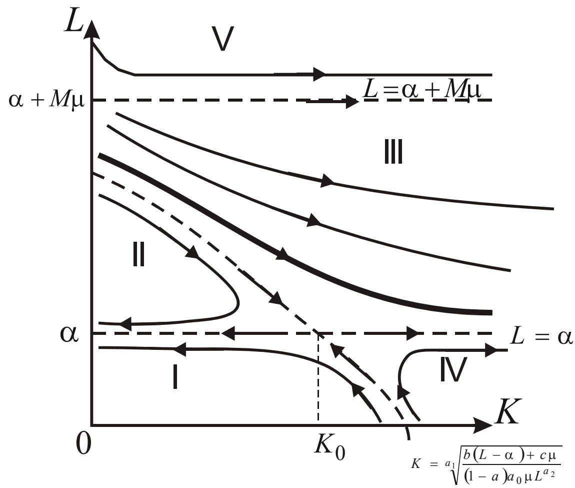

Рис.1. Фазовый портрет динамической модели развития региона.

В качестве начальных значений для Рязанской области выберем $t_0 = 2005$ г, $L(t_0) = 525{,}4$ тыс.чел., $K(t_0) = 289479$ млн.руб. Траектория, проходящая через точку $\left(K(t_0), L(t_0)\right)$, схематично изображена на рис. 1 сплошной толстой линией.

Для построения прогноза экономического развития региона найдем решение системы (10), (12), используя аналитическое и численное интегрирование вспомогательной системы (14).

Второе уравнение в системе (14) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Его решение, удовлетворяющее начальному условию $\left(t_0, y(t_0)\right)$, имеет, согласно (Степанов, 1959), вид: $y(t) = \dfrac{M\mu y(t_0)}{y(t_0) + \left(M\mu - y(t_0)\right)e^{-r(t-t_0)}}$. Используя вид функции $y(t)$ и замену переменных $L(t) = y(t) + L_0$ ($L_0 = \alpha$), получаем решение второго уравнения системы (10), (12), удовлетворяющее начальному условию $\left(t_0, L(t_0)\right)$ и соотношению $L(t_0) = y(t_0) + \alpha$: $L(t) = \dfrac{M\mu L(t_0)}{L(t_0) + \left(M\mu - L(t_0)\right)e^{-r(t-t_0)}} + \alpha$. Для начального условия:

$t_0 = 2005$ г., $L(t_0) = 525{,}4$ тыс. чел., — с учетом значений параметров (11), функция $L(t)$ примет вид:

$$L(t) = \frac{21749{,}61}{1 + 79{,}69e^{0{,}014(t-2005)}} + 255{,}84\,. \tag{16}$$

Прогноз, полученный с помощью функции (16), представлен на рис. 2. Сплошная линия показывает прогнозное изменение численности населения, занятого в экономике, а пунктирные линии отражают границы доверительного интервала.

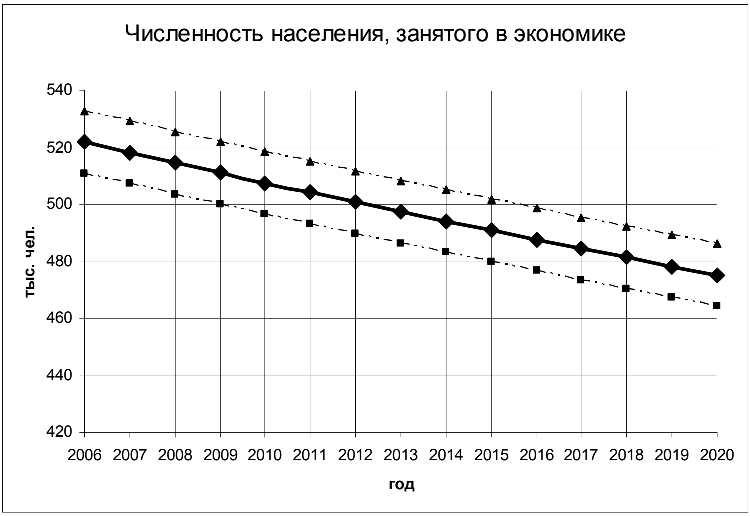

Рис. 2. Прогноз изменения численности населения, занятого в экономике, по Рязанской области.

Подставим функцию (16) в первое уравнение системы (10), (12) получим:

$$\dot{K} = (1-a)a_0 K^{a_1}\left(L(t)\right)^{a_2} - \frac{b}{\mu}\left(L(t) - \alpha\right) - c\,. \tag{17}$$

Численное решение уравнения (17), удовлетворяющее начальному условию $\left(t_0, K(t_0)\right)$, согласно (Степанов, 1959), можно представить в виде многочлена Тейлора:

$$K(t) = K(t_0) + \dot{K}(t_0)t + \frac{\ddot{K}(t_0)}{2!}t^2 + o(t^2), \tag{18}$$

где $\dot{K}(t_0)$, $\ddot{K}(t_0)$ — значения первой и второй производной по времени t от функции $K(t)$ в точке t_0, вычисленные с использованием уравнения (17) и функции $L(t)$ (16).

Задавая последовательность t_{0_n}, начиная с $t_{0_1} = 2005$ г., получим «пошаговый» прогноз изменения стоимости основных фондов экономики, представленный на рис. 3. Сплошная линия показывает прогнозное изменение стоимости основных фондов экономики, а пунктирные линии отражают границы доверительного интервала.

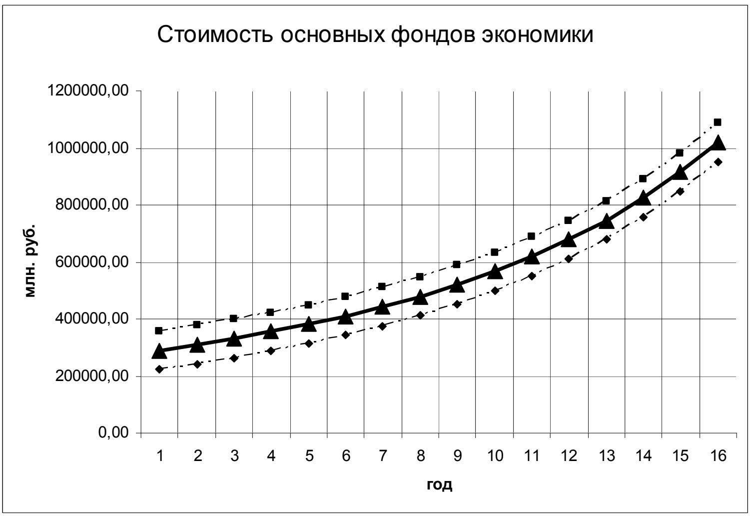

Рис. 3. Прогноз изменения стоимости основных фондов экономики по Рязанской области.

Подставляя значения $L(t)$ и $K(t)$ в производственную функцию $X = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$, построим прогноз изменения валового регионального продукта Рязанской области, представленный на рис. 4. Сплошная линия показывает прогнозное изменение валового регионального продукта, а пунктирные линии отражают границы доверительного интервала.

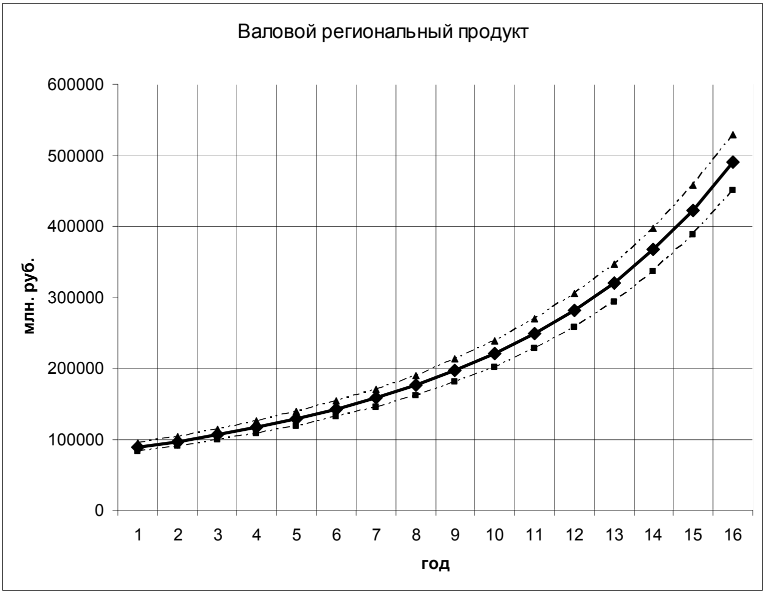

Рис. 4. Прогноз изменения валового регионального продукта Рязанской области.

Таким образом, можно отметить, что численность населения занятого в экономике, в Рязанской области будет уменьшаться, а стоимость основных фондов экономики — увеличиваться.

Исходя из вида функции, описывающей доходную часть регионального бюджета и прогноза валового регионального продукта, получаем следующий график, описывающий изменение бюджета Рязанской области.

Результаты численно-аналитического исследования системы (10), (12) полностью соответствуют проведенному качественному исследованию.

Прогнозное значение доходной части бюджета Рязанской области в 2006 году составило 11621922 тыс. руб., в 2007 году — 12902867 тыс. руб., в 2008 году — 14344610 тыс. руб. Фактическое значение доходной части бюджета Рязанской области в 2006 году составило 10600014 тыс. руб., в 2007 году — 12565121 тыс. руб., в 2008 году — 15040793 тыс. руб. А соответствующие доверительные интервалы: 2006 год — от 10522038 тыс. руб. до 12521998 тыс. руб., 2007 год — от 11871820 тыс. руб. до 13934139 тыс. руб., 2008 год — от 13167069 тыс. руб. до 15522151 тыс. руб.

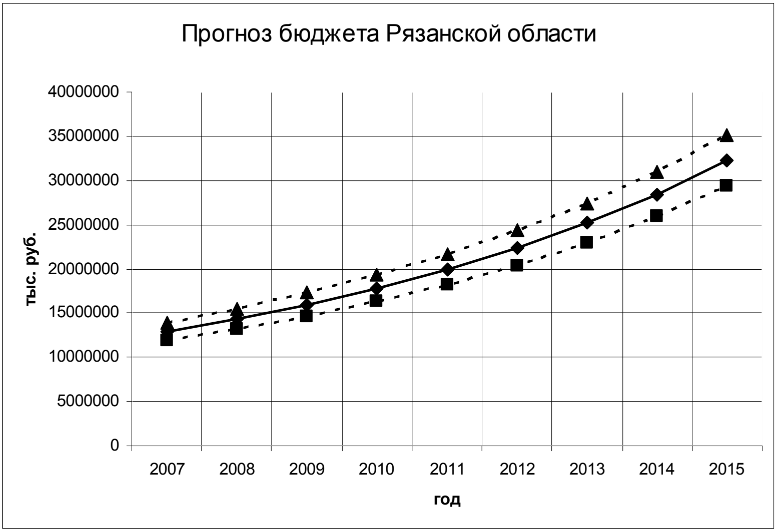

Рис. 5. Прогноз изменения доходной части бюджета Рязанской области.

Сравнение прогнозных и фактических значений доходной части бюджета Рязанской области за 2006–2008 годы позволяет отметить, что фактические значения удовлетворяют прогнозируемому доверительному интервалу, что свидетельствует об адекватности построенной модели.

Заключение. На основе выполненного исследования можно сделать следующие выводы:

1) в ближайшее время на территории Рязанской области будет наблюдаться снижение численности населения, занятого в экономике, что повлечет за собой рост социальной напряженности в регионе;

2) стоимость основных фондов экономики, объем валового регионального продукта и доходная часть регионального бюджета будут расти; в силу того, что отсутствует фактический рост производства, рост перечисленных показателей обусловлен инфляционными процессами.

Результаты исследования указывают на то, что в Рязанской области сложилась экономическая ситуация, характеризующаяся отсутствием роста производства и требующая вмешательства руководящих структур, прежде всего региональных.

Первостепенными мерами по улучшению сложившейся в регионе ситуации можно считать:

1) увеличение объемов производства за счет открытия новых предприятий и реструктуризации старых;

2) восстановление наукоемкого производства;

3) создание благоприятного инвестиционного климата в регионе;

4) привлечение рабочей силы извне;

5) поддержка малого и среднего бизнеса и тому подобное.

Цель мероприятий — такое изменение структуры экономики, которое обеспечивало бы рост численности населения, занятого в экономике при одновременном увеличении стоимости основных фондов экономики и валового регионального продукта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — М.–Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, 2003.

Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. — М.: Наука, 1976.

Елисеева, И.И. Эконометрика / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др.; под ред. И.И. Елисеевой. — М.: Финансы и статистика, 2007.

Колемаев, В.А. Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3-х томах. — М.: Высшая школа, 1988. – Т. 1.

Кундышева, Е.С. Математическое моделирование в экономике. — М.: «Дашков и К°», 2004.

Рязанской области 70 лет // Юбилейный статистический сборник. — Рязань: Рязаньстат, 2007.

Социальное положение и уровень жизни населения Рязанской области // Статистический сборник. — Рязань: Рязаньстат, 2002.

Социальное положение и уровень жизни населения Рязанской области // Статистический сборник. — Рязань: Рязаньстат, 2007.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

Тихонов М.С. Определение параметров уравнения Ферхюльста о допустимой численности населения // Материалы Международной научно-практической конференции «Национальная экономика: региональный аспект». — Рязань, 2007. — С. 197–200.

www. budget r f . r u

www. i r ex. r u

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF ONE-SECTOR MODEL OF A REGION

Tikhonov M. S.

Dynamic one-sector model of regional development is considered. The model takes into account competition of engaged in economy for limited resource of workplaces. Model behavior is investigated and numeric estimations of model parameters are obtained. Calculations are based on statistical data for the Ryazan region. Results of the research are used for forecasting revenues of the regional budget.