О ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКА К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ

Егоров А. А., Раббот Ж. М., Шляпочник Л. Я.

В статье рассмотрены некоторые задачи по теме «Десятичная запись числа» и «Натуральные числа» для подготовки школьников к олимпиадам. Каждый пример сопровождается кратким решением или его идеей, а также комментариями, адресованными преподавателям.

Введение. Роль математических олимпиад в среднем образовании школьников хорошо известна, этот вопрос уже давно широко обсуждается в научно-методической литературе.

В последние годы мы столкнулись с ещё одной ипостасью олимпиады — для её победителей это способ поступить в хороший вуз, минуя обычный конкурс (особенно если это только ЕГЭ). При этом традиционно крупные, широко известные олимпиады типа Московской, Санкт-Петербургской и т.п. практически не изменили критерии отбора задач, поскольку их уровень достаточно высок для отбора абитуриентов по соответствующим специальностям. Раньше всех без экзаменов начали поступать в ведущие вузы нашей страны победители международных олимпиад.

С другой стороны, как известно, далеко не всегда достаточно сильные школьники побеждают на олимпиадах. В этой ситуации в прежние годы они поступали в вуз на общих основаниях, сдавая вступительный экзамен. Оценка в аттестате зрелости по соответствующему предмету была, как правило, достаточно высокой, и вступительный экзамен у них часто проходил весьма успешно.

Сейчас ситуация изменилась. Школьник либо побеждает в олимпиаде и поступает в вуз, но при этом у него всё равно должна быть достаточно высокая оценка за ЕГЭ, либо не побеждает в олимпиаде, и тогда всё решает ЕГЭ.

Поэтому подготовка к олимпиаде не исключает специального тренинга к ЕГЭ, причём для сильного школьника необходимо особое внимание обращать на его раздел С.

Правда, в этом разделе за редким исключением обычно давались не олимпиадные, а технически трудные стандартные задачи, на решение и, что немаловажно, требуемое оформление решений которых обычно не хватает отведённого на ЕГЭ времени (около 20 совсем стандартных задач разделов А и В занимают почти всё скудное экзаменационное время). И всё же сильный школьник должен сдать ЕГЭ с решением хотя бы части задач последнего раздела. Хорошую помощь в этом вопросе могут оказать книги [38] и [39] из приложения.

К настоящему времени накоплено достаточно материалов для проведения занятий по подготовке к участию в олимпиадах. Большими тиражами изданы книги, в которых задачи олимпиад и других соревнований иногда подобраны в виде вариантов, дававшихся школьникам на этих турнирах, иногда рассортированы по темам и идеям, часто с подробными комментариями и обобщениями; встречаются и комбинации этих принципов. Всё это хорошо видно из обширного (но далеко не исчерпывающего) списка литературы, заканчивающего статью.

При этом нелёгкая задача преподавателя — среди этого моря материала оптимально выбрать в нужной последовательности темы и содержание занятий. Конечно, выбор существенно зависит от цели занятий, состава аудитории (её подготовленности, возраста, уровня мотивировки участников и т.п.), сроков подготовки. Но обычно даже при одинаковых начальных предпосылках лишь постепенно происходит «обкатка» каждой темы, выстраивание последовательности тем, подбор наиболее интересных иллюстраций встречающихся при решении соображений и т.п. Безусловно, большую роль здесь играют личные пристрастия преподавателя, его вкусы и предпочтения.

В настоящей статье рассмотрены с некоторыми комментариями первые темы занятий (на тему «Целые числа») по подготовке к олимпиаде, учитывающих указанную выше специфику современных олимпиад. Для каждой темы рассматривается характерная задача или задачи, для которых даются указания к их решению, или схемы решения, или решения. Мы приводим, в основном, олимпиадные задачи; как правило, на указанных олимпиадах давалось 6 задач, а для 11-го класса — 7 задач.

При выборе задач из использованных источников мы исходили, в частности, из ограничений, накладываемых на преподавателя необходимостью *устного выступления* перед учащимися школ (на лекциях). Вот основные из этих ограничений: краткость, прозрачность, наглядность и хорошая обозримость решения задачи, эффектность постановки и/или решения, новизна, поучительность и эффективность применяемых при решении математических идей и методов (пожалуй, это последнее — в первую очередь).

При этом важно понимать, что успешно учить способного и заинтересованного школьника квалифицированный преподаватель может практически по любой книге олимпиадного характера. В качестве примера мы решили взять сборники задач нескольких Московских олимпиад и на них (в основном!) продемонстрировать эту мысль, приведя планы нескольких занятий (лекционного характера) с начинающими знакомиться с олимпиадами учащимися.

Обозначения. МГО–2005 (МОО–2005) — Московская городская (окружная) математическая олимпиада 2005-го года (например).

Некоторые знакомые школьникам темы в необычном ракурсе

1. Десятичная запись числа. С одной стороны, это первое, с чем сталкивается школьник при обучении математике. С другой стороны, идеи позиционной системы счисления мало обсуждаются в школьном курсе и, в частности, задачи на использование десятичной системы записи редко появляются в школьных задачниках. Но, как мы увидим, эти задачи могут быть достаточно интересными.

1. (МОО–2007, (70 Московская…, 2007) — 1-я задача для 8-го класса). *Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили 2007. Каким могло быть исходное число?*

Краткое решение. Пусть $a = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$ – искомое n-значное число. Рассмотрим разность между полученной записью этого числа и суммой его цифр. По условию, получим уравнение

$$a_0 \cdot (10^n - 1) + a_1 \cdot (10^{n-1} - 1) + \ldots + 999a_{n-3} + 99a_{n-2} + 9a_{n-1} = 2007 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{11\ldots1}_{n\ раз} a_0 + \underbrace{11\ldots1}_{n-1\ раз} a_1 + \ldots + 1111a_{n-4} + 111a_{n-3} + 11a_{n-2} + a_{n-1} = 223,$$

линейное относительно цифр a_i (здесь $i = 0, 1, 2, \ldots, n$-1, а последняя цифра, a_n, оказывается произвольной). Теперь становится ясным, что если хотя бы одна из цифр $a_0, a_1, \ldots, a_{n-4}$ больше нуля, то полученное уравнение не имеет решений в целых числах от 0 до 9. Далее (например, перебором) находим все решения.

Ответ: любое натуральное число от 2010 до 2019.

Комментарий. Что же нового может узнать неискушённый в математике школьник на лекции, услышав решение этой задачи (адаптированное к его возрасту)? Во-первых, лучше понять десятичную запись числа в общем виде (это лектор должен объяснить сначала), она в школьном учебнике встречается крайне редко. Во-вторых, после этого решения школьники, как правило, безо всяких затруднений сами в состоянии вывести (в крайнем случае, понять) признак делимости числа на 3 и на 9, а далее им можно рассказать и другие признаки делимости (весьма успешно в этом цикле проходит рассмотрение делимости на натуральные степени двойки). В-третьих, решение выводит на разговор о диофантовых уравнениях, сначала простых. При решении таких уравнений часто применяется разумный перебор — одна из красивых идей, которая поначалу кажется школьнику крамольной — нестрогой. Наконец, школьник с удовольствием узнаёт, что бывает задача (не система уравнений), имеющая ровно 10 решений! Список можно, конечно, продолжить. Приведённые соображения показывают, что рассмотренная задача вполне может открывать лекцию — она одноходовая, фактически на одну идею, так что для начала курса она годится. Конечно, надо иметь в виду, что задача специально придумана для обыгрывания года её использования, но это не должно нас смущать.

2. (МОО–2007, (70 Московская…, 2007) — 1-я задача для 9-го класса.). *Существует ли натуральное число, кратное* 2007*, сумма цифр которого равна* 2007?

Идея решения. Поскольку $2007 = 9 \cdot 223$, а сумма цифр числа 2007 равна 9, то нетрудно догадаться, сколько раз достаточно повторить четверку цифр 2007, чтобы получить требуемое число.

Ответ: да, существует.

Комментарий. Полезно обратить внимание начинающего любителя математики то, что мы не утверждаем, что в решении приводится единственный способ получения искомого числа. Возможно, кто-нибудь попытается построить такое число другого вида. В качестве комментария можно привести пример задачи на доказательство существования, в которой объект вообще не обязательно строить: требуется выяснить, можно ли через произвольную точку M на стороне AB треугольника ABC провести прямую, делящую его на две равновеликие (т.е. равные по площади) части. Можно решать эту задачу так: будем вращать луч с концом в точке M из положения MA в положение MB так, чтобы он рассекал треугольник. В начальный момент времени «площадь» части, примыкающей к отрезку MA, равна нулю, а площадь остальной части треугольника ABC равна всей площади S данного треугольника. При вращении первая площадь начинает увеличиваться, а вторая — уменьшаться (конечно, важно, что это происходит непрерывно!). В конце части меняются местами: первая равна S, а вторая — нулю. Значит, где-то по дороге они равнялись друг другу. Конечно, строго доказать это непросто, да и, пожалуй на первых порах и не требуется — это достаточно очевидно. Например, если $MA > MB$, можно записать площадь S_1 левой части до момента, когда луч пройдёт через вершину C, как линейную функцию от её высоты, опущенной на основание MA и просто нарисовать её график; он пройдёт через точку с ординатой $S/2$.

Как видно из комментариев к первым двум задачам, мы заботимся о достаточной логической нагрузке на школьника, хотим приучать его к аккуратности мышления.

3. (МГО–2006, (LXIX Московская…, 2006) — 2-я задача для 11-го класса). *Найдите все несократимые дроби a/b, представимые в виде b,a (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел b и a).*

Краткое решение. Из данного равенства $\frac{a}{b} = b,a$ и очевидного неравенства $b,a > 1$ следует, что $a > b$. Пусть десятичная запись числа a имеет n знаков. Умножив обе части данного равенства на 10^n и заменив число $10^n \cdot b,a$ на $10^n \cdot b + a$, получаем уравнение

$$10^n\left(a - b^2\right) = ab. \qquad (*)$$

Правая часть этого уравнения делится на a и на b. Но число $a - b^2$, в силу взаимной простоты чисел a и b, взаимно-просто с ними (либо уменьшаемое, либо вычитаемое не делится на каждое из них). Поэтому второй сомножитель левой части (*) должен равняться 1. Так как $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$ (иначе число 10 на два сомножителя не раскладывается), учитывая, что $a > b$, получим, что либо $a = 10^n$ и $b = 1$, либо $a = 5^n$ и $b = 2^n$. Но первый случай невозможен: в первой паре значений у числа a не n, а $n + 1$ десятичный знак, что противоречит исходному предположению. Во втором случае это предположение (во всяком случае, при некоторых значениях n, например, при $n = 2$) не даёт противоречия.

Подставив полученные соотношения в равенство $a - b^2 = 1$, приводим его к виду $\left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \frac{1}{4^n}$. Поскольку левая часть последнего уравнения возрастает, а правая — убывает, оно может иметь не более одного корня. Число $n = 1$ удовлетворяет ему. Полученные значения для a и b проверяются подстановкой в условие.

Ответ: $a = 5, b = 2$.

Комментарий. Рассмотренная задача также имеет много аспектов, на которые стоит обратить внимание школьника. Здесь и не всегда простая работа с понятиями делимости, взаимной простоты, монотонности, и переход от записи обыкновенной дроби к записи десятичной, и акцентирование внимания ученика на справедливость равенства $10^n{\cdot}b{,}a = 10^n{\cdot}b + a$, и очень важные соображения перехода в силу делимости от одного уравнения к системе. При этом задача уже не одноходовка, в ней приходится сочетать целый ряд соображений, но решение вполне обозримо.

4. ((Васильев с соавт., 2007), с. 8, задача 32,а). *Найдите сумму цифр всех натуральных чисел от* 1 *до* 2000.

Краткое решение. Пусть все целые числа от 0 до 1999 выписаны по порядку. Рассмотрим пары чисел, равноотстоящих от начала и конца записи:

$$(0;1999),(1;1998),(2;1997),\ldots,(9;1990),(10;1989),\ \ldots,\ (999;1000).$$

Ясно, что сумма цифр в каждом разряде (!) одинакова для любой пары, причём для каждой пары сумма цифр равна 28. Поскольку пар всего 1000 и осталось без пары число 2000 с суммой цифр 2, получаем ответ.

Ответ: 28002.

Комментарий. Мы полагаем, что трудно или почти невозможно догадаться до такого способа решения, если, конечно, речь не идёт об очень талантливом ребёнке (вспомним истории о юном Гауссе). Поэтому такую задачу имеет смысл не давать для самостоятельного решения, а именно рассказать, обратив особое внимание на аллюзии, связанные со свойствами арифметической прогрессии. Похожие соображения иногда используются в комбинаторных задачах, в задачах на инварианты.

2. Натуральные числа. Эта тема также сопровождает школьника с первого класса. Поэтому задачи, предлагаемые в ней, понятны большинству слушателей и, значит, популярны на олимпиадах разного уровня. Важно лишь не переборщить поначалу с трудностью — ведь с натуральными числами связаны самые разные по уровню задачи, от тривиальных упражнений до проблем — нерешённых вопросов.

5. (МОО–2007, (70 Московская…, 2007) — 3-я задача для 10-го класса). *Определите, на какую наибольшую натуральную степень числа* 2007 *делится* число 2007!.[1]

Идея решения. Поскольку $2007 = 3^2 \cdot 223$, ответ получится, если мы узнаем, в какой степени входит (простое!) число 223 в разложение числа 2007! на простые множители. Поскольку, очевидно, $223^2 > 2007$, нам надо лишь подсчитать, сколько чисел, кратных 223, расположены на отрезке числовой оси от 1 до 2007. Для этого достаточно разделить 2007 на 223, получится, как мы знаем, $3^2 = 9$.

Ответ: на девятую.

Комментарий. Разложение числа на простые множители (основная теорема арифметики целых чисел), расположение чисел с заданным свойством на числовой прямой — стандартные проблемы, возникающие при решении задач, связанных с целыми числами. Знакомство с этим разделом мы начали с задачи, формулировка которой могла напугать неискушённого ученика. Но затем, разобравшись в ситуации, можно увидеть несложность и естественность применённых соображений и получить решение.

6 (МГО–2007, (70 Московская…, 2007) — 3-я задача для 10-го класса.). *Существуют ли такие натуральные числа x и y, что x^2+x+1 является натуральной степенью y, а y^2+y+1 — натуральной степенью x*?

Краткое решение. Запишем условие в виде

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = y^n, \\ y^2 + y + 1 = x^m, \end{cases} \quad x, y, n, m \in N.$$

Первое, что полезно сделать, — это рассмотреть случай $x = y$. Нетрудно доказать, что этот случай невозможен. Действительно, из равенства $x^2 + x + 1 = x^n$ следует, что (при $n > 2$) правая, а значит, и левая часть этого равенства делятся на x. Но это возможно лишь при $x = 1$. Подставив

[1] По определению, $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Запись $n!$ читается как «эн факториал» и означает произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

это значение x в рассматриваемое равенство, получим неверное равенство $3 = 1$. Случаи $n = 1$ и $n = 2$ легко проверяются непосредственно.

Итак, остаётся случай $x \neq y$. В силу симметрии условия относительно переменных x и y без ограничения общности можно считать, что $x > y$. Тогда $x \geq y + 1$. Почленно возведя последнее неравенство в квадрат (это можно сделать в силу положительности его левой и правой частей), получим, что

$$x^2 \geq y^2 + 2y + 1 > y^2 + y + 1.$$

При дальнейшем возведении числа x в натуральную степень, очевидно, неравенство будет сохраняться, так как при $m > 2$ будет верна цепочка неравенств

$$x^m > x^2 > y^2 + y + 1.$$

Таким образом, нетрудно получить, что $m = 1$, т.е. $x = y^2 + y + 1$. Подставив это выражение в равенство $x^2 + x + 1 = y^n$ и раскрыв скобки, получим, что y — делитель числа 3. Но ни 1, ни 3 не годятся.

Ответ: таких чисел нет.

Комментарий. На примере этой задачи мы столкнулись с простейшими случаями исследования делимости, идеей рассмотрения иногда сначала простейших случаев (равенства переменных), индуктивного рассуждения ($m = 1$). Безусловно, стоит также обратить внимание на психологическую трудность осознания отрицательности ответа. Далее, конечно, лектору полезно порассуждать о необходимых и достаточных условиях делимости суммы, произведения, частного, а затем перейти к более серьёзным вещам: простые числа (в том числе удивительная по красоте евклидова доказательства теорема о бесконечности множества простых чисел), основная теорема арифметики целых чисел, сравнения и арифметика остатков, алгоритм Евклида, малая теорема Ферма, функция Эйлера и т.д.

Завершим этот пункт следующей задачей с «комбинаторным» уклоном.

7. (МГО–2008, (LXXI Московская…, 2008) — 4-я задача для 9-го класса.). *Назовем «усложнением» числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?*

Краткое решение. Докажем, что среди чисел от 0 до N–1, где $N = 10^{500}$, найдётся такое число. Для этого оценим в рассматриваемом диапазоне количество чисел, из которых можно указанным образом получить полный квадрат, и сравним это количество с N – 1. Если окажется, что N – 1 больше, в данном диапазоне останутся числа, из которых нельзя получить требуемым образом полный квадрат.

Поскольку каждое усложнение увеличивает число цифр числа (количество разрядов) на 1, если любое число из этого диапазона усложнить 100 раз, получится число, меньшее чем $10^{500} \cdot 10^{100} = 10^{600} = \left(10^{300}\right)^2$. Поэтому существует ровно 10^{300} полных квадратов, меньших, чем 10^{600}.

Пусть k — один из этих квадратов. Количество чисел, из которых его можно получить указанной в условии операцией, не превосходит количества способов зачеркнуть в нем 100 цифр, которое, в свою очередь, строго меньше количества способов выбрать из множества его цифр произвольный набор. Последнее же количество равно $2^{p(k)} \le 2^{600}$, где $p(k)$– количество цифр в k (на каждом из $p(k)$ мест мы ставим либо 0 — не берём эту цифру в выборку, либо 1 — берём; всего способов получить такую последовательность из нулей и единиц, очевидно, равно $2^{p(k)}$). Таким образом, общее количество чисел от 0 до N–1, из которых может быть получен полный квадрат, не превосходит $10^{300} \cdot 2^{600} = 10^{300} \cdot 8^{200} < 10^{500} - 1 = N - 1$. Отсюда следует, что на промежутке от 0 до N–1 найдётся число (и не одно!), из которого 100-кратным усложнением нельзя получить полный квадрат, что и требовалось.

Ответ: существует.

Комментарий. Несмотря на очевидную особенность доказательства — его *неконструктивность*, подобные доказательства существования различных объектов играют значительную роль в современной математике. Школьникам полезно указать и другие примеры таких доказательств, скажем, конечность или периодичность десятичной дроби, получающейся при делении числителя обыкновенной дроби на её знаменатель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика (Библиотечка КВАНТ, №100. Приложение к журналу «Квант», №2, 2007). — М.: «Бюро Квантум», 2007.

70 Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. — М.: Издательство МЦНМО, 2007. http://olympiads.mccme.ru/mmo/

LXIX Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. — М.: Издательство МЦНМО, 2006. http://olympiads.mccme.ru/mmo/

LXXI Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. М.: Издательство МЦНМО, 2008. http://olympiads.mccme.ru/mmo/

ПРИЛОЖЕНИЕ. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, С.А.Шестаков, И.И.Юдина, «Геометрия-8. Дополнительные главы к школьному учебнику». М.: «Просвещение», 1996.
2. И.Ф.Шарыгин, «Задачи по геометрии. Планиметрия». М.: «Наука», 1986.
3. А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи, «Как решают нестандартные задачи».М.: Издательство МЦНМО, 2008.
4. Л.И.Звавич, Л.Я.Шляпочник, М.В.Чинкина, «Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 8-11 классов. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики (контрольные работы, подготовка к экзаменам, решение задач для поступающих в вузы)». М.: Издательский дом «ДРОФА», 1999.
5. Л.И.Звавич, Л.Я.Шляпочник, И.И.Кулагина, «Алгебра и начала анализа. (Решение задач письменного экзамена, 11-й класс.)» М.: «ДРОФА», 2000.
6. Л.И.Звавич, М.В.Чинкина, Л.Я.Шляпочник, «Дидактические материалы по геометрии для 8-11 классов. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики (контрольные работы, тесты, примерные билеты и задачи к устным экзаменам)». М.: «ДРОФА», 2000.
7. В.Н.Литвиненко, А.Г.Мордкович, «Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия». М.: «Просвещение», 1991.
8. Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын, С.И.Шварцбурд, «Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа». М.: «Просвещение», 1990.
9. Л. И. Звавич, Д.И.Аверьянов, Б.П.Пигарев, Т.Н.Трушанина, «Задания для подготовки к письменному экзамену по математике в 9-ом классе». М.: «Просвещение», 1999 – 2006.
10. Л.И.Звавич, Л.Я.Шляпочник, «81 разноуровневая контрольная работа для подготовки к Единому Государственному Экзамену. Комплексное повторение курса алгебры и начал математического анализа» (выходит из печати). М.: Изд-во «Экзамен», 2009.
11. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев, Э.Г.Позняк, И.И.Юдина, «Геометрия, 7-9», 14-е издание. М.: «Просвещение», 2004.

12. И.Ф.Шарыгин, «Геометрия, 7-9», 2-е изд. М.: «Дрофа», 1998.
13. В.И.Голубев, А.М.Гольдман, А.Б.Пятерикова, Р.В.Разумейко, В.А.Тарасова, Е.В.Шикин, «Треугольник. Справочное пособие. Выпуск 1», МГУ им. М.В.Ломоносова, Международная ассоциация «Лицей». Пущино Моск.области: ОНТИ Пущинского научного центра РАН, 1992.
14. Э.Г.Готман, «Задачи по планиметрии и методы их решения». М.: «Просвещение», АО «Учебная литература», 1996.
15. Ж.М.Раббот, «Традиционое заочное образование и современные информационные технологии». Доклад на конференции ИТО-2001.
16. Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, «О путях дальнейшего совершенствования программы и форм работы заочных математических школ. В сб. "Заочное обучение математике школьников 8-10 классов" (сборник научных трудов)». М.: НИИСиМО, 1979.
17. А.А.Егоров, Ж.М.Раббот, «Иррациональные уравнения». КВАНТ, № 5, 2001.
18. А.А.Егоров, Ж.М.Раббот, «Монотонные функции в конкурсных задачах». КВАНТ, № 6, 2002.
19. Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом, Заочные математические олимпиады», 2-е изд., перераб. М.: «Наука», 1986.
20. А.А.Егоров, Ж.М.Раббот, «Геометрия. Рабочая тетрадь к учебнику И. Ф. Шарыгина "Геометрия 7-9", 8-й кл.» [В 2 ч.]. М.: «Дрофа», 1999.
21. А.Л.Тоом, В.Л.Гутенмахер, Н.Б.Васильев, Ж.М.Раббот, «Задачи устного экзамена по математике». М.: Изд-во МГУ, 1970.
22. А.А.Егоров, Ж. М.Раббот, «Монотонные функции в конкурсных задачах». `http://www.allmath.ru/olimp/school/school24/school.htm`
23. Д.В.Фомин, «Санкт-Петербургские математические олимпиады». СПб.: «Политехника», 1994.
24. С.Л.Берлов, С.В.Иванов, К.П.Кохась, «Петербургские математические олимпиады». СПб.: Изд-во «Лань», 2003.
25. С.Е.Рукшин, «Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет». Ростов-на-Дону: Издательский центр «МарТ», 2000.
26. А.А.Егоров, Ж.М. Раббот, «Олимпиады "Интеллектуальный марафон". Математика». М.: Бюро Квантум, 2006. (Библиотечка «Квант». Вып. 97. Приложение к журналу «Квант», № 5, 2006.)
27. А.А.Леман. «Сборник задач московских математических олимпиад». М.: Просвещение, 1965.
28. Н.Б.Васильев, А.А.Егоров, «Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков». М.: «Учпедгиз», 1963.
29. Н.Б.Васильев, А.А. Егоров, «Задачи Всесоюзных математических олимпиад». М.: «Наука», 1988.
30. Н.В. Горбачёв, «Сборник олимпиадных задач по математике». М.: МЦНМО, 2004.
31. С.В.Конягин, Г.А.Тоноян, И.Ф.Шарыгин и др., «Зарубежные математические олимпиады». Под ред. И.Н.Сергеева (Б-ка мат. кружка). М.: «Наука. Гл. ред. физ.-мат лит.», 1987.

32. В.А.Вышенский, Н.В.Карташов, В.И.Михайловский, М.И.Ядренко, «Сборник задач киевских математических олимпиад». Киев: «Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те», 1984.
33. Г.А.Гальперин, А.К.Толпыго, «Московские математические олимпиады: Кн. для учащихся». Под ред. А.Н.Колмогорова. М.: «Просвещение», 1986.
34. Л.П.Купцов, С.В.Резниченко, Д.А.Терёшин, «Российские математические олимпиады школьников: Кн. для учащихся». Под ред Г.Н.Яковлева. Ростов-на-Дону: Изд-во "Феникс", 1996.
35. Н.Х.Агаханов, И.И.Богданов, П.А.Кожевников, О.К.Подлипский, Д.А.Терёшин, «Всероссийские олимпиады школьников по математике, 1993-2006: Окружной и финальный этапы». Под ред. Н.Х.Агаханова. М.: МЦНМО, 2007.
36. Р.М.Фёдоров, А.Я.Канель-Белов, А.К.Ковальджи, И.В.Ященко, «Московские математические олимпиады 1993 – 2005». Под ред В.М.Тихомирова. М.: МЦНМО, 2006.
37. «Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду». Под ред. А.А.Заславского, Д.А.Пермякова, А.Б.Скопенкова, М.Б.Скопенкова, А.В.Шаповалова. М.: МЦНМО, 2009.
38. Г.В.Дорофеев, Е.А.Седова, С.А.Шестаков. ЕГЭ 2009. Математика. Суперрепетитор. М.: Эксмо, 2008.
39. И.Н.Сергеев. ЕГЭ. Математика. Задания типа С. М.: Издательство «Экзамен», 2009.
40. В.В.Дрозина, В.Л.Дильман. Механизм творчества решения нестандартных задач. Руководство для тех, кто хочет научиться решать нестандартные задачи: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2008.
41. В.И.Голубев, Л.Н.Ерганжиева, К.К.Мосевич. Построение треугольника. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
42. В.И.Голубев. Решение сложных и нестандартных задач по математике. М.: ИЛЕКСА, 2007.

ABOUT PUPIL TRAINING FOR MATHEMATICAL OLYMPIAD

Yegorov A. A., Rabbot Zh. M., Shlyapochnik L. Ya.

The article discusses some «Decimal notation of numbers» and «Natural numbers» problems to prepare students for the Olympiad. Each example is accompanied by a brief decision or its idea, and comments for the teachers.