О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ОПЕРАТОРА ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА

Дементьева А.М., Дементьев С.Н., Яновский Л.П.

Воронежский государственный аграрный университет им. К.Д.Глинки,
каф. Высшей математики и теоретической механики,
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, 1,
Тел.: (4732) 537-371, E-mail: mathem@agroeng.vsau.ru

Ряд теорем о неподвижных точках, доказанных в [1], предполагают односторонние ограничения на нелинейность, сформулированные в терминах скалярных произведений или использующие неравенства в пространствах функций с естественной упорядоченностью. Авторами предлагается объединить оба вида односторонних оценок на основе подхода, имеющего конусную природу.

Рассмотрим банахово пространство E и некоторое полуупорядоченное конусом K пространство F. Обозначим через θ_F ноль пространства F. Пусть оператор $A : E \to E$ задан и вполне непрерывен в ограниченной области $\Omega \subset E$, содержащей θ_E, и на границе $\partial\Omega$. Предположим, что существуют отображения $T_1 : E \to F$ и $T_2 : R(A) \to F$, где $R(A)$ – область значений оператора A.

Теорема 1. Пусть для всех $x \in \partial\Omega$ выполнено неравенство

$$T_2(Ax) \le T_1(x)$$

и операторы T_1, T_2 при $Ax = \lambda x,\ \lambda > 0,\ x \in \partial\Omega$ удовлетворяют условиям

$$T_2(Ax) \ge \lambda T_1(x);\quad T_1(x) > \theta_F .$$

Тогда оператор A имеет в $\overline{\Omega}$ по крайней мере одну неподвижную точку.

Теорема 2. Пусть A – линейный вполне непрерывный, а f – ограниченный непрерывный операторы в E. Пусть для $x \in E$ операторы T_1, T_2, T_3, действующие из E в F, удовлетворяют следующим условиям:

$$T_1(x) > \theta_F \text{ при } x \ne \theta_E;$$

$$T_3(fAx) \ge \lambda T_1(x) \text{ при } fAx = \lambda x \text{ и } \lambda > 0;$$

$$T_2(Ax) \le \mu T_1(x) \text{ для некоторых } \mu \ge 0 .$$

Пусть $\inf \mu = \mu(A)$, где μ удовлетворяет предыдущему условию. Пусть, наконец, $T_3(fx) \le qT_2(x) + b$ при $0 \le q\mu(A) < 1,\ b \ge \theta_F$ и из условия $T_1(x) \le a,\ a \ge \theta_F$ для некоторого $R > 0$ вытекает неравенство $\|x\| \le R$. Тогда оператор Гаммерштейна $B = Af$ имеет в E по крайней мере одну неподвижную точку.

Литература.

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа.- М.: Наука, 1975. 510 с.