ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Атнагулова Р.А., Голубчик И.З.

450000 г.Уфа ул.Октябрьской революции, 3А

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(q_i)_t = F_i(q_1, \dots, q_l, t), 1 \le i \le l, q_i|_{t=0} = q_i(0) \tag{1}$$

Пусть в записи функций F_i входят в виде суперпозиции лишь полиномы от переменных и функции $\exp(x)$;lnx;$\frac{1}{x}$;$\sqrt[n]{x}$,n>1; $\sin x$; $\cos x$. Тогда решение системы (1) сводится, путем добавления большого числа вспомогательных переменных к квадратичной системе ОДУ, то есть к

$$q_t = r(q)q, q|_{t=0} = q(0), \tag{2}$$

где q-столбец переменных q_1,...,q_n, n>l и $r(q)$- матрица размера $n \times n$ и $r(q)q_1$=$r(q_1)q$ для всех столбцов q и q_1. Пусть система ОДУ (1), а значит и (2) имеет решение при $-a \le t \le b$. Рассмотрим систему ОДУ

$$q_t = r(q)(q - tr(q_0)q_0), \tag{3}$$

Система (2) сводится к системе (3) путем добавления вспомогательных элементов. Пусть V=$\begin{pmatrix} q \\ p \\ \lambda \end{pmatrix}$-столбец размера 2n+1, E-единичная матрица размера $n \times n$ и λ=$(\varepsilon^{-2})(\varepsilon^{-3} + t)^{-1}$, где ε- малый параметр. Положим $R(V) = \begin{pmatrix} \lambda E + r(q) & r(q) & q \\ \lambda E & \lambda E & q+p \\ 0 & 0 & -\varepsilon^2\lambda \end{pmatrix}$. Рассмотрим систему алгебраических уравнений (4)

$$V + (\varepsilon^{-3} + t)R(V)V = u_0 + tu_1, \tag{4}$$

где u_0=$\begin{pmatrix} q_0(1+\varepsilon^{-2}) + r(q_0)q_0\varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-2}q_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, u_1=$\varepsilon^{-2}\begin{pmatrix} r(q_0)q_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда система (4)при достаточно малом ε и $-a \le t \le b$ имеет ровно одно решение $q(t,\varepsilon)$, $p(t,\varepsilon)$, дифференцируемое по t, где $q(0,\varepsilon)$=q_0, $p(0,\varepsilon)$=0. При этом $q(t,\varepsilon)$ аналитично по ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и $limq(t,\varepsilon)$=$q(t)$-решение системы (3) при $-a \le t \le b$. Предел равномерный по t.