

## **ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ЛА-САЛЛЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ**

**Апонин Ю.М., Апонина Е.А.**

Институт математических проблем биологии РАН  
Россия, 142290, г. Пущино, ул. Институтская 4,  
Тел.: (4967) 73-38-29, факс: (4967) 33-05-70,  
E-mail: [yma@impb.psn.ru](mailto:yma@impb.psn.ru)

В поведении динамических систем принято выделять установившиеся и переходные движения. Установившимися называются движения, возникающие в системе по прошествии больших промежутков времени и обладающие некоторыми свойствами устойчивости и повторяемости. Переходными называются неустановившиеся движения, в процессе которых система из некоторого начального состояния сколь угодно близко приближается к одному из установившихся движений.

Локализация установившихся движений, т.е. аналитическая оценка компактного множества в фазовом пространстве, содержащего все траектории установившихся движений, является важной задачей исследования математических моделей динамических систем. При решении этой задачи существенную роль играет теорема Ла-Салля о локализации траекторий установившихся движений с помощью обобщённых функций Ляпунова, орбитальная производная которых неположительна. Множество точек в фазовом пространстве с нулевым значением орбитальной производной функции Ляпунова называется нейтральным. Согласно теореме Ла-Салля, нейтральное множество притягивает к себе любое движение с предкомпактной положительной полутраекторией и содержит все траектории установившихся движений.

В настоящей работе рассматриваются примеры применения теоремы Ла-Салля при аналитическом исследовании математических моделей популяционной динамики. В частности, рассматривается математическая модель эволюции бактериальной популяции при длительном непрерывном культивировании. Наряду с давлением отбора, обусловленном различиями генетических вариантов популяции по удельной скорости роста, в модели учитываются мутационные потоки, горизонтальный перенос генетической информации и нестабильность её переносчиков – плазмид. Для этой модели построена обобщённая функция Ляпунова и на основании теоремы Ла-Салля установлено существование в фазовом пространстве положительно инвариантного компактного полиэдрального множества. Дано аналитическое описание этого полиэдра, как множества решений конечной системы линейных неравенств. Доказано, что этот полиэдр является глобально притягивающим множеством и, следовательно, содержит в себе траектории всех возможных в модели установившихся движений. Обсуждаются перспективы применения численных методов анализа рассмотренных моделей с учётом полученных результатов их аналитического исследования.